GUESSMATHS

Revue n°4 :

Chapitre « Fonction logarithme et fonction Exponentielle»

2éme Bac SC.Maths A et B

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1er Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen

Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme »

Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com
whatsapp : 0717467136

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition

On appelle logarithme népérien la fonction primitve sur $]0;+\infty[$ de la fonction inverse définie sur IR^* par : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

La fonction logarithme népérien, notée **ln**, est la fonction :

$$\begin{aligned} \ln :]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log** est définie par : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Conséquences :

a) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

II. Propriété de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

2) Conséquences

Corollaires :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

d) $\ln x^n = n \ln x$ avec n entier relatif

III. Etude de la fonction logarithme népérien

1) Continuité et dérivabilité

Propriété :

La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;+\infty[$.

Propriété :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2) Variations

Propriété :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Corollaires :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

b) $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

3) Limites aux bornes

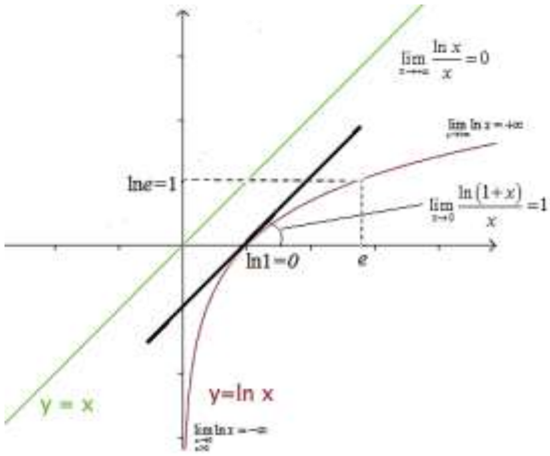
Propriété :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

4) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	|| $+$	
$\ln x$	|| $-\infty$ ↗	$+\infty$



IV. Limites et croissances comparées

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$

Remarque :

Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Propriétés :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

V. Fonctions de la forme ln u

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \ln u(x)$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto \ln u(x)$ ont le même sens de variation.

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$A=\ln 8$; $B=\ln\frac{1}{16}$; $C=\frac{1}{2}\ln 16$; $D=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$

2) Exprimez en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants :

$a=\ln 24$; $b=\ln 144$; $c=\ln\frac{8}{9}$

3) Ecrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme :

$A=2\ln 3+\ln 2+\ln\frac{1}{2}$ $\qquad$ $B=\frac{1}{2}\ln 9-2\ln 3$

Exercice n°2.

Comparez les réels x et y : $x=3\ln 2$ et $y=2\ln 3$

$x=\ln 5-\ln 2$ et $y=\ln 12-\ln 5$

Exercice n°3.

Simplifier au maximum :

$a=\ln\left(e^{2}\right)$; $b=\ln\left(e^{3}\right)$; $c=\ln\left(\frac{1}{e^{2}}\right)$; $d=\ln\left(\sqrt{e}\right)$; $f=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$

Exercice n°4.

Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(2+5x)=\ln(x+6)$

2) $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3$

3) $\ln x=2$

4) $\frac{2(1+\ln x)}{x}=0$

5) $(\ln x)^{2}+\ln x-6=0$

6) $\ln(2x-5)=1$

7) $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=0$

8) $\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0$

9) $\ln(x-1)=\ln(2x-1)$

10) $\ln(|x-1|)=\ln(2x-1)$

11) $\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)$

Exercice n°5.

1) Développer l'expression : $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

2) Résoudre les équations suivantes :

(a): $\ln\left(x^{3}+2\right)=\ln\left(2x^{2}+x\right)$

(b): $\ln\left(|x|^{3}+2\right)=\ln\left(2x^{2}+|x|\right)$

(c): $\ln\left(x^{3}-x^{2}-3x+3\right)=\ln\left(x^{2}-2x+1\right)$

(d): $\ln\left(x^{3}-x^{2}-3x+3\right)=2\ln(x-1)$

Exercice n°6.

Résoudre le système d'équations suivant :

1) $\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} \\ \ln x+\ln y=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \ln xy=5 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}$

Exercice n°7.

Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2+5x)\le\ln(x+6)$

2) $\ln(x-1)+\ln(x-3)<\ln 3$

3) $\ln x>2$

4) $\dfrac{2(1+\ln x)}{x}>0$

5) $(\ln x)^2+\ln x-6\le 0$

6) $\ln(2x-5)\ge 1$

7) $(1,2)^n\ge 4 \quad (n\in IN)$

8) $(0,8)^n\ge 0,1 \quad (n\in IN)$

Exercice n°8.

Etudier le signe des expressions suivantes :

$A(x)=\ln x(\ln x+1)$ $\qquad B(x)=2x\ln(1-x)$

$C(x)=-x^2\ln(x+1)$

Exercice n°9.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln\left(x^2+3x-4\right)$

2) $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x^2}{x}\right)$

3) $f(x)=\ln\left(4-x^2\right)-\ln x$

4) $f(x)=\ln\left(x^2-4\right)-\ln(-x)$

Exercice n°10.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}((1-x)\ln x)$

6) $\lim\limits_{x\to0^+}(x-4+\ln x)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{x}\right)$

Exercice n°11.

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous

1) $f(x)=-\frac{x}{2}+1+2\ln x$

2) $f(x)=\frac{2\ln x}{\ln 3}$

3) $f(x)=\ln(4-x)+\ln x$

4) $f(x)=x\ln x-x$

5) $f(x)=x^2\ln x$

6) $f(x)=\ln(2x-5)$

7) $f(x)=\ln(-3x+1)$

8) $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$

9) $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

10) $f(x)=\ln(\ln x)$

11) $f(x)=x\ln(2x-3)$

12) $f(x)=2x(1-\ln x)$

13) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

14) $f(x)=\frac{x-\ln x}{x^2}$

15) $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-4$

16) $f(x)=\ln x^2$

17) $f(x)=(\ln x)^2$

18) $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$

Exercice n°15.

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln(ax+b)$, et C sa courbe représentative.

1) Déterminer les nombres a et b tels que $f(2)=0$ et $f'(3)=\frac{3}{4}$

Quel est alors l'ensemble de définition de f ?

Quel est le sens de variation de f ?

2) Déterminer les nombres a et b tels que la courbe C passe par le point A(2 ;0) et la tangente en A ait pour coefficient directeur –2.

Exercice n°16.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-2\ln x$

1) Etudier le sens de variation de g

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter géométriquement ce résultat.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C). Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0;+\infty[$.

Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera

3) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées du point B

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α. Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α. Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que : $31.10^{-2} < \alpha < 35.10^{-2}$

6) Représenter la courbe (C) ; la tangente (T) et la droite (Δ).

Exercice n°17.

Partie I

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$

1) Etudier le sens de variations de f. Calculer les limites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Déterminer l'entier n tel que $\alpha \in]n;n+1[$

3) Déterminer le signe de $f(x)$

Partie II

La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases} 0 & si \;\; x=0 \\ -\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x & si \;\; x>0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$

2) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=x\,f\left(\frac{1}{x}\right)$

3) Montrer que : $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$. Dresser le tableau de variation de g.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{\alpha}$.

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

5) Représenter succinctement Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice n°18.

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ sur $I=]0;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{3}{3x-4}$ sur $I=\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $I=]-1;+\infty[$

6) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $I=]-\infty;-1[$

7) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$ sur $I=]2;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$ sur $I=[2;+\infty[$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur IR

10) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $I=]-1;1[$

Exercice n°19.

On considère la fonction définie sur $I=[4;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$

1) Trouver trois réels a,b, et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

2) En déduire une primitive de f sur $I=[4;+\infty[$

Exercice n°20.

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=[1;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ sur $I=]1;+\infty[$

4) $f(x)=\tan x$ sur $I=\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$

Exercice n°21.

Calculez les intégrales

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$ 2) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx$ 3) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{4}{1-5x}dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx$ 5) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx$

6) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ 7) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx$

Exercice n°22.

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x-1}$

1) Montrez que pour tout x de $]1;+\infty[$; $f(x)=x+4+\frac{3}{x-1}$

2) Calculez $\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$

Exercice n°23.

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{-2}{3};+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{6x^2+13x+4}{3x+2}$

1) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que pour tout x de $\left]\frac{-2}{3};+\infty\right[$:

$f(x)=ax+b-\frac{c}{3x+2}$

2) Calculez $\int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$

Exercice n°24.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x\ln x-x$

1) Déterminez la fonction dérivée g' de g

2) Calculez $\int_1^e \ln x\, dx$

Exercice n°25.

Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties : $I=\int_1^e x\ln x\, dx$

Exercice n°26.

On considère l'application f_n définie pour tout t de IR_+^* par : $f_n(t)=\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}$ où n est un entier strictement positif.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel t strictement positif :

$f_n(t)=\frac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\frac{c}{t}$

2) Montrer que : $\int_1^2 f_n(t)\, dt=\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_1^2 \frac{t^{n-1}.\ln t}{\left(t^n+1\right)^2}\, dt$

Exercice n°27.

On considère la suite (U_n) de réels strictement positifs, définie par : $U_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(U_n)$

1) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et préciser la nature de la suite (U_n) .

2) Déterminer la monotonie de la suite (U_n) , et préciser sa limite.

3) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} U_k$ en fonction de n.

4) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} \ln(U_k)$ en fonction de n. En déduire le calcul de $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ en fonction de n.

Exercice n°28.

Soit la fonction f définie sur IR_+^* par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1) Donner la dérivée de f.

2) Donner le sens de variation de f.

3) Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

4) Donner une primitive de f sur IR_+^*.

5) Quel est le sens de variation de la fonction G définie sur IR_+^* par : $\int_1^x f(t)dt$

Exercice n°29.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right) & si \;\; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. f est-elle dérivable en 0 ?

2) Etudier le sens de variations de f.

3) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[e;+\infty[$

4) Soit T la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 1.
Déterminer l'équation de T.

5) Tracer la courbe représentative (C) de f et la droite T dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) Soit $\lambda \in]0;e]$. On pose : $I(\lambda) = \int_\lambda^e f(x)dx$

a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in]0;e]$

b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0

c) En déduire l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x=0)$ et $(x=e)$

Exercice n°30.

Soit la fonction f définie par : $f(x)=x\ln(|x|)$

1) Donner le domaine de définition D de la fonction f ; déterminer une parité éventuelle ; et étudier les limites aux bornes du domaine de définition. Calculer pour tout x de D la dérivée de f (si elle existe !)

2) On étudie, pour cette question, le cas $x>0$.

Montrer qu'il existe un unique λ tel que $f'(\lambda)=0$; montrer que l'on a : $0,3\leq\lambda\leq 0,4$ (on pourra utiliser le fait que le réel e tel que $\ln e=1$ vérifie $2,5\leq e\leq 3$)

3) En déduire le tableau de variations de f (sur D)

4) Déterminer une primitive de g définie par $g(x)=\ln x$ (on précisera le domaine sur lequel on travaille)

Exercice n° 31

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

1. Déterminer D et calculer les limites de f aux bornes de D.
2. Montrer que C admet la droite Δ d'équation : $y=\frac{x}{2}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.
3. Etudier la position relative de la courbe C et la droite Δ .
4. a) Vérifier que pour tout x de D on a : $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{x(\ln x)^2}$

   b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation sur D.

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN CORRECTION

Exercice n°1.

1) • $A=\ln 8=\ln\left(2^3\right)=\boxed{3\ln 2}$

• $B=\ln\frac{1}{16}=-\ln 16=-\ln 2^4=\boxed{-4\ln 2}$

• $C=\frac{1}{2}\ln 16=\frac{1}{2}\ln 2^4=\frac{1}{2}\times 4\ln 2=\boxed{2\ln 2}$

• $D=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}\ln 4=-\frac{1}{2}\ln 2^2=-\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\ln 2=-\ln 2$

2) $a=\ln 24=\ln(3\times 8)=\ln 3+\ln 2^3=\boxed{\ln 3+3\ln 2}$

$b=\ln(144)=\ln(12)^2=2\ln(3\times 4)=2\ln(3\times 2^2)$

$=2\ln 3+2\ln 2^2=\boxed{2\ln 3+4\ln 2}$

$c=\ln\left(\frac{8}{9}\right)=\ln\left(\frac{2^3}{3^2}\right)=\ln 2^3-\ln 3^2=\boxed{3\ln 2-2\ln 3}$

3) $A=2\ln 3+\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 3^2+\cancel{\ln 2}-\cancel{\ln 2}=\boxed{\ln 9}$

$B=\frac{1}{2}\ln 9-2\ln 3=\ln\left(\sqrt{9}\right)-2\ln 3=\ln 3-2\ln 3=-\ln 3=\boxed{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

Exercice n°2.

■ $x=3\ln 2=\ln 2^3=\ln 8$ et $y=2\ln 3=\ln 3^2=\ln 9$

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $8<9$; alors $x<y$

■ $x=\ln 5-\ln 2=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ et $y=\ln 12-\ln 5=\ln\left(\frac{12}{2}\right)$

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\frac{5}{2}<\frac{12}{2}$; alors $x<y$

Exercice n°3.

■ $a=\ln(e^2)=2\ln e=2\times 1=2$

■ $b=\ln(e^3)=3\ln e=3\times 1=3$

■ $c=\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\ln e^2=-2\ln e=-2$

■ $d=\ln\left(\sqrt{e}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$

■ $f=\ln\left(e\sqrt{e}\right)=\ln e+\ln\left(\sqrt{e}\right)=1+\frac{1}{2}\ln e=\frac{3}{2}$

Exercice n°4.

1) $\boxed{\ln(2+5x)=\ln(x+6)}$

$$x\in D_{Et}\Leftrightarrow\begin{cases}2+5x>0\\ x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{2}{5}\\ x>-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\\ x\in]-6;+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap]-6;+\infty[\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

$\ln(2+5x)=\ln(x+6)\Leftrightarrow 2+5x=x+6$

$\Leftrightarrow x=1$

Comme $1 \in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$ alors : $\boxed{S=\{1\}}$.

2) $\boxed{\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]1;+\infty[\\ x \in]3;+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]1;+\infty[\cap]3;+\infty[\Leftrightarrow x \in]3;+\infty[$$

Donc : $D_{Et} =]3;+\infty[$

$$\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left((x-1)(x-3)\right)=\ln 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=3$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=4$$

Comme $0 \notin]3;+\infty[$ et $4 \in]3;+\infty[$ alors : $\boxed{S=\{4\}}$.

3) $\boxed{\ln x=2}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x \in]0;+\infty[$$

Donc : $D_{Et} =]0;+\infty[$

$$\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \times \ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

Comme $e^2 \in]0;+\infty[$ alors : $\boxed{S=\{e^2\}}$

4) $\boxed{\frac{2(1+\ln x)}{x}=0}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0;+\infty[$$

Donc : $D_{Et} =]0;+\infty[$

$$\frac{2(1+\ln x)}{x}=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-1$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-\ln e$$

$$\Leftrightarrow \ln x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

Comme $\frac{1}{e} \in]0;+\infty[$ alors : $\boxed{S = \left\{\frac{1}{e}\right\}}$.

5) $\boxed{(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0}$

$x \in D_{Et} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0;+\infty[$

Donc : $D_{Et} =]0;+\infty[$

On pose $X = \ln x$ on obtient : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0$

Que l'on sait résoudre on a comme solutions : $X = 2$ et $X = -3$

$(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 2 \\ \ln x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ x = e^{-3} \end{cases}$ Donc : $\boxed{S = \{e^2 ; e^{-3}\}}$

6) $\boxed{\ln(2x-5) = 1}$

$x \in D_{Et} \Leftrightarrow 2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

Donc : $D_{Et} = \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-5) = 1 \Leftrightarrow \ln(2x-5) = \ln e$

$\Leftrightarrow 2x - 5 = e$

$\Leftrightarrow x = \frac{e+5}{2}$

Comme $\frac{e+5}{2} \in]0;+\infty[$ alors : $\boxed{S = \left\{\frac{e+5}{2}\right\}}$.

7) $\boxed{\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0}$

$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1} > 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{2x-1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc : $D_{Et} = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$

$$\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=\ln 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}=1$$

$$\Leftrightarrow x-\cancel{1}=2x-\cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Comme $0\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S=\{0\}}$.

8) $\boxed{\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0}$

$x\in D_{Et} \Leftrightarrow 2x-1\neq 0$ et $\frac{x-1}{2x-1}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{1}{2}$ et $x\neq 1$ Donc :

$$D_{Et}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

$$\ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\left|\frac{x-1}{2x-1}\right|\right)=\ln 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{2x-1}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-1}=1 \quad ou \quad \frac{x-1}{2x-1}=-1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=\frac{2}{3}$$

Comme $0\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ et $\frac{2}{3}\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ alors :

$\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$.

9) $\boxed{\ln(x-1)=\ln(2x-1)}$

$$x\in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left]1;+\infty\right[\\ x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]1;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]1;+\infty\right[$

$$\ln(x-1)=\ln(2x-1) \Leftrightarrow x-1=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Comme $0\notin\left]1;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S=\varnothing}$.

10) $\boxed{\ln(|x-1|)=\ln(2x-1)}$

$$x\in D_{Et}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$$\ln\left(|x-1|\right)=\ln\left(2x-1\right)\Leftrightarrow|x-1|=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x-1=2x-1\quad ou\quad x-1=-2x+1$$

$$\Leftrightarrow x=0\quad ou\quad x=\frac{2}{3}$$

Comme $0\notin\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ et $\frac{2}{3}\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ alors $\boxed{S=\left\{\frac{2}{3}\right\}}$

11) $\boxed{\ln\left(|x-1|\right)=\ln\left(|2x-1|\right)}$

$$x\in D_{Et}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\2x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[=IR-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$

$$\ln\left(|x-1|\right)=\ln\left(|2x-1|\right)\Leftrightarrow|x-1|=|2x-1|$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2x-1\\x-1=-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Comme $0\in IR-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$ et $\frac{2}{3}\in IR-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$ alors $\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$

__Exercice n°5.__

1) $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

$=\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)=x^3-2x^2-x+2$

2) Résoudre les équations suivantes :

- $\boxed{(a):\ \ln\left(x^3+2\right)=\ln\left(2x^2+x\right)}$ Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation

  L'équation est bien définie si et seulement si

$$\begin{cases} x^3+2>0 \\ 2x^2+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3>-2 \\ x(2x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\sqrt[3]{2} \\ x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$$

$$D_{ét}=\left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$$

$$(a):\ \Leftrightarrow x^3+2=2x^2+x \Leftrightarrow x^3+2-2x^2-x=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \ ou \ x=-1 \ ou \ x=2$$

$1;-1 \ et \ 2\in\left]-\sqrt[3]{2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$ alors $\boxed{S=\{-1;1;2\}}$

■ $\boxed{(b):\ \ln\left(|x|^3+2\right)=\ln\left(2x^2+|x|\right)}$

L'équation est bien définie sur IR car pour tout x dans IR $|x|^3+2>0$ et $2x^2+|x|>0$;

On pose : $X=|x|$ on obtient :

$$(b):\ \ln\left(|x|^3+2\right)=\ln\left(2x^2+|x|\right) \Leftrightarrow \ln\left(X^3+2\right)=\ln\left(2X^2+X\right)$$

$$\Leftrightarrow X^3+2=2X^2+X$$

$$\Leftrightarrow X^3-2X^2-X+2=0$$

D'après la question précédente on a : $X=\pm1$ et $X=2$ or $X=|x|\geq 0$ d'où :

$\boxed{S=\{-2;-1;1;2\}}$

■ $\boxed{(c):\ \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln\left(x^2-2x+1\right)}$ Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation

Pour cela on pose : $f(x)=x^3-x^2-3x+3$ et $g(x)=x^2-2x+1$ on peut facilement factoriser f en remarquant que : $f(1)=0$ d'où : $f(x)=(x-1)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$ et on obtient le tableau de signe de f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+\sqrt{3}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Et $g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ on a : $g(x)>0$ pour $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Donc $D_{ét} = \left(\left]-\sqrt{3};1\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[\right) \cap \left(\left]-\infty;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right)$

$= \left]-\sqrt{3};1\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$

(c): $\ln\left(x^3 - x^2 - 3x + 3\right) = \ln\left(x^2 - 2x + 1\right) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

D'après ce qui précède $x = -1$; $x = 1$ ou $x = 2$ or $1 \notin \left]-\sqrt{3};1\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$ donc :

$\boxed{S = \{-1;2\}}$

- $\boxed{(d): \ln\left(x^3 - x^2 - 3x + 3\right) = 2\ln(x-1)}$

Comme précédemment on obtient : $D_{ét} = \left]-\sqrt{3};1\right[$

(d): $\ln\left(x^3 - x^2 - 3x + 3\right) = 2\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^3 - x^2 - 3x + 3\right) = \ln(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

D'après ce qui précède $x = -1$; $x = 1$ ou $x = 2$ or $1 \notin \left]-\sqrt{3};1\right[$ et $2 \notin \left]-\sqrt{3};1\right[$ donc :

$\boxed{S = \{-1\}}$

Exercice n°6.

1) $\boxed{\begin{cases} x - y = \dfrac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}}$ x et y sont solution du système 1) ssi $x > 0$ et $y > 0$;et on résout le système par substitution

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln x + \ln y = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln x + \ln\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln\left[x\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\right] = \ln 1 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \dfrac{3}{2} & L_1 \\ x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \dfrac{3}{2} & L_1 \\ x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - \dfrac{3}{2} & L_1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \quad ou \quad x = 2 & L_2 \end{cases}$$

Or $x > 0$ Donc : $\boxed{S = \left\{\left(2;\dfrac{1}{2}\right)\right\}}$

2) $\boxed{\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}}$ x et y sont solutions du système 2) ssi $x > 0$ et $y > 0$

On pose par changements de variables $X = \ln x$ et $Y = \ln y$ on obtient :

$\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5X + 2Y = 26 \\ 2X - 3Y = -1 \end{cases}$ comme le discriminant de ce système est différent de 0 :alors le système admet une unique solution

$X = 4 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$ et $Y = 3 \Leftrightarrow \ln y = 3 \Leftrightarrow y = e^3$

Donc : $\boxed{S = \left\{\left(e^4;e^3\right)\right\}}$

3) $\boxed{\begin{cases} \ln xy = 5 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}}$ x et y sont solutions du système 3) ssi $x > 0$ et $y > 0$

$\ln xy = \ln x + \ln y$

On pose par changements de variables $X = \ln x$ et $Y = \ln y$ on obtient :

$\begin{cases} \ln xy = 5 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x + \ln y = 5 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = -12 \end{cases}$

Donc X et Y sont solution de l'équation : $X^2 - 4X - 12 = 0$ d'où : $X_1 = -2$ et $X_2 = 6$

Et comme X et Y jouent des rôles symétriques alors les solutions sont :$(-2;6)$ ou $(6;-2)$

d'où : $x = e^{-2}$ et $y = e^6$ ou $x = e^6$ et $y = e^{-2}$ donc : $\boxed{S = \left\{\left(e^{-2};e^6\right),\left(e^6;e^{-2}\right)\right\}}$

__Exercice n°7.__

1) $\boxed{\ln(2+5x) \le \ln(x+6)}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+5x>0 \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{5} \\ x>-6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap \left]-6;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

$$\ln(2+5x) \le \ln(x+6) \Leftrightarrow 2+5x \le x+6$$
$$\Leftrightarrow x \le 1$$

donc : $\boxed{S = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap \left]-\infty;1\right[} = \left]-\frac{2}{5};1\right[$

2) $\boxed{\ln(x-1)+\ln(x-3)<\ln 3}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]1;+\infty\right[\cap \left]3;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]3;+\infty\right[$

$$\ln(x-1)+\ln(x-3)<\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left[(x-3)(x-1)\right]<\ln 3$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-1)<3$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+\cancel{3}<\cancel{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x<0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)x<0$$
$$\Leftrightarrow x \in \left]0;4\right[$$

donc : $\boxed{S = \left]3;+\infty\right[\cap \left]0;4\right[} = \left]3;4\right[$

3) $\boxed{\ln x \ge 2}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x \in \left]0;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]0;+\infty\right[$

$$\ln x \ge 2 \Leftrightarrow \ln x \ge 2 \times \ln e$$
$$\Leftrightarrow \ln x \ge \ln e^2$$
$$\Leftrightarrow x \ge e^2$$

Comme $S = \left]0;+\infty\right[\cap \left[e^2;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S = \left[e^2;+\infty\right[}$.

4) $\boxed{\dfrac{2(1+\ln x)}{x}>0}$

$$x \in D_{Et} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]0;+\infty\right[$$

Donc : $D_{Et} = \left]0;+\infty\right[$

$$\frac{2(1+\ln x)}{x}>0 \Leftrightarrow 1+\ln x>0$$
$$\Leftrightarrow \ln x>-1$$
$$\Leftrightarrow \ln x>-\ln e$$
$$\Leftrightarrow \ln x>\ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$$

Donc $S=\left]\frac{1}{e};+\infty\right[\cap\left]0;+\infty\right[$ alors : $\boxed{S=\left]\frac{1}{e};+\infty\right[}$.

5) $(\ln x)^2+\ln x-6\le 0$

$x\in D_{Et}\Leftrightarrow x>0\Leftrightarrow x\in\left]0;+\infty\right[$ Donc : $D_{Et}=\left]0;+\infty\right[$

On pose $X=\ln x$ on obtient : $(\ln x)^2+\ln x-6\le 0\Leftrightarrow X^2+X-6\le 0$

Que l'on sait résoudre on a comme solutions : $X=2$ et $X=-3$

$(\ln x)^2+\ln x-6\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x\le 2\\ \ln x\ge -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le e^2\\ x\ge e^{-3}\end{cases}$ Donc : $\boxed{S=\left[e^{-3};e^2\right]}$

6) $\boxed{\ln(2x-5)\ge 1}$

$x\in D_{Et}\Leftrightarrow 2x-5>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}\Leftrightarrow x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

Donc : $D_{Et}=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$$\begin{aligned}\ln(2x-5)\ge 1&\Leftrightarrow\ln(2x-5)\ge\ln e\\&\Leftrightarrow 2x-5\ge e\\&\Leftrightarrow x\ge\frac{e+5}{2}\end{aligned}$$

Donc $S=\left[\frac{e+5}{2};+\infty\right[\cap\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ alors : $\boxed{S=\left[\frac{e+5}{2};+\infty\right[}$

7) $\boxed{(1,2)^n\ge 4\quad(n\in IN)}$

$(1,2)^n\ge 4\Leftrightarrow\ln(1,2)^n\ge\ln 4$ (La fonction $\ln$ est continue strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$)

$\Leftrightarrow n\ln(1,2)\ge\ln 4$

$\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln 4}{\ln(1,2)}\simeq 7.61$ $(Car\ \ln(1,2)\ est\ positif)$

Alors : $\boxed{n\ge 8}$

8) $\boxed{(0,8)^n\le 0,1\quad(n\in IN)}$

$(0,8)^n\le 0,1\quad\Leftrightarrow\ln(0,8)^n\le\ln(0,1)$

(La fonction $\ln$ est continue strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$)

$\Leftrightarrow n\ln(0,8)\le\ln(0,1)$

$\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)}\simeq 10.31$ $(Car\ \ln(0,8)\ est\ négatif)$

Alors : $\boxed{n\ge 11}$

Exercice n°8.

■ $A(x)=\ln x(\ln x+1)$ On étudiera le signe $A(x)$ sur $D_A=\left]0;+\infty\right[$

Tableau de signe de $A(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

■ $B(x)=2x\ln(1-x)$ On étudiera le signe $B(x)$ sur $D_B=]-\infty;1[$

Tableau de signe de $B(x)$

x	$-\infty$		0		1
$2x$		$-$	0	$+$	$\Vert$
$\ln(1-x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$B(x)$		$-$	0	$-$	

■ $C(x)=-x^2\ln(x+1)$ On étudiera le signe $C(x)$ sur $D_C=]-1;+\infty[$

Tableau de signe de $C(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$	0	$-$	
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice n°9.

1) $f(x)=\ln(x^2+3x-4)$

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2+3x-4>0$ en cherchant les racines du polynôme $P(x)=x^2+3x-4$ on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : $\boxed{D_f=]-\infty;-4[\cup]1;+\infty[}$

2) $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x^2}{x}\right)$

Etudions le signe de $\dfrac{4-x^2}{x}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$			$\vert$		.	$+$	
$4-x^2$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$\dfrac{4-x^2}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

D'où : $\boxed{D_f =]-\infty;-2[\cup]0;2[}$

3) $f(x) = \ln\left(4-x^2\right) - \ln x$

$x \in D_f \Leftrightarrow 4-x^2 > 0 \ et \ x > 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x	//////	//////	//////	//////				$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$			0	$-$	

D'où : $\boxed{D_f =]0;2[}$

4) $f(x) = \ln\left(x^2-4\right) - \ln(-x)$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2-4 > 0 \ et \ x < 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$				//////	//////	//////	//////
x^2-4		$+$	0	$-$			0	$+$	

D'où : $\boxed{D_f =]-\infty;-2[}$

Exercice n°10.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right) = +\infty$ Par somme des deux limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2 - 3\ln x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2 = +\infty$ On pose $t = x^2$ et on utilise $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}((1-x)\ln x) = -\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ par produit on obtient $-\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to0^+}(x-4+\ln x) = -\infty$

On a $\lim\limits_{x\to0^+}x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right) = F.I\,(+\infty\times 0)$

On pose : $X = \dfrac{1}{x}$ $x \mapsto +\infty$ alors $X \mapsto 0^+$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{X\to0^+}\left(\frac{1}{X}\ln(1+X)\right)$$

$$= \lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right) =$

8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{x}\right) = F.I\left(\dfrac{"0"}{0}\right)$ On pose : $X = 2x$ $x \mapsto 0$ alors $X \mapsto 0$ donc :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)=\lim_{X\to0}\left(2\times\frac{\ln(1+X)}{X}\right)$$
$$=\lim_{X\to0}\left(2\times\frac{\ln(1+X)}{X}\right)=2$$

car $\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$

Exercice n°11.

1) La fonction définie par $f(x)=-\frac{x}{2}+1+2\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui sont définies et dérivables sur le même intervalle et : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{x}=\frac{4-x}{2x}}$

2) La fonction définie par $f(x)=\frac{2\ln x}{\ln 3}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de la fonction $x\mapsto\ln x$ par le réel $\frac{2}{\ln 3}$ et on a : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=\frac{2}{x\ln 3}}$

3) La fonction définie par $f(x)=\ln(4-x)+\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[\cap]-\infty;4[=]0;4[$ et on a :

$$(\forall x\in]0;4[)\quad f'(x)=\frac{-1}{4-x}+\frac{1}{x}=\frac{-x+4-x}{x(4-x)}$$

Donc : $\boxed{(\forall x\in]0;4[)\quad f'(x)=\frac{2(2-x)}{x(4-x)}}$

4) La fonction définie par $f(x)=x\ln x-x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonction usuelles et qui sont définies et dérivables sur $]0;+\infty[$,et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=\ln x+\cancel{x\times\frac{1}{x}}-\cancel{1}$ donc : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=\ln x}$

5) La fonction définie par $f(x)=x^2\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions qui sont définies et dérivables sur $]0;+\infty[$,et on a :

$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}$ donc : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=x(2\ln x+1)}$

6) La fonction définie par $f(x)=\ln(2x-5)$ est définie et dérivable sur $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ (car $X\mapsto\ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $2x-5>0\Leftrightarrow x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$) et $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=2x-5\Rightarrow u'(x)=2$

On obtient : $\boxed{\left(\forall x\in\left]\frac{2}{5};+\infty\right[\right)\quad f'(x)=\frac{2}{2x-5}}$

7) La fonction définie par $f(x)=\ln(-3x+1)$ est définie et dérivable sur $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ (car $X\mapsto\ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $-3x+1>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$) et $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=-3x+1\Rightarrow u'(x)=-3$

On obtient : $\boxed{\left(\forall x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[\right) \quad f'(x) = \frac{-3}{-3x+1}}$

8) La fonction définie par $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $x^2+x+1>0$. Si on note $P(x)=x^2+x+1$, le calcul de son discriminant fournit $\Delta=-3$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\ln(u(x))$

avec $u(x)=x^2+x+1 \Rightarrow u'(x)=2x+1$. Ainsi $\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x+1}{x^2+x+1}}$

9) La fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $\frac{x-1}{x+1}>0$

Si on note $P(x)=\frac{x-1}{x+1}$, le tableau de signes de P est donné par :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)=\frac{x-1}{x+1}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Ainsi, f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ Puisque P est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, puisque pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ $\frac{x-1}{x+1}>0$ et puisque $X \to \ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on conclut que f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\ln(P(x))$, on aura $f'(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}$. Puisque $P(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=x-1$ et $v(x)=x+1$,on aura $f'(x)=\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

Donc : $\boxed{f'(x)=\frac{2}{(x+1)(x-1)}}$

10) La fonction définie par $f(x)=\ln(\ln x)$ n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $\ln x>0$ c'est-à-dire $D_f=]1;+\infty[$

Pour tout $x\in]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\ln(u(x))$ où $u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ on obtient :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

11) La fonction définie par $f(x)=x\ln(2x-3)$ est définie et dérivable sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ en tant que produit de fonctions qui le sont (car $X\to\ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $2x-3>0 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ Puisque pour tout $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$; $f(x)=u(x)v(x)$ où $u(x)=x$ et $v(x)=\ln(2x-3)$, on en déduit ;

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$=\ln(2x-3)+x\times\frac{2}{2x-3}$$
$$=\ln(2x-3)+\frac{2x}{2x-3}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\dfrac{(2x-3)\ln(2x-3)+2x}{2x-3}}$

12) La fonction définie par $f(x)=2x(1-\ln x)$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$ $f(x)=u(x)v(x)$ où $u(x)=2x$ et $v(x)=1-\ln(x)$, on en déduit : $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$=2\times(1-\ln(x))+2x\times\left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\cancel{2}-2\ln(x)-\cancel{2}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=-2\ln x}$

13) La fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$ $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=\ln x$ et $v(x)=x$, on en déduit :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\times\cancel{x}-1\times\ln(x)}{x^2}$$
$$=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}}$

14) La fonction définie par $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x^2}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions

qui le sont. Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$ $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=x-\ln x$ et $v(x)=x^2$,

on en déduit : $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\times x^2-\left(x-\ln(x)\right)\times 2x}{\left(x^2\right)^2}$$

$$=\frac{x^2-x-2x^2+2x\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{-x^2-x+2x\ln x}{x^4}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\dfrac{2\ln x-x-1}{x^3}}$

15) La fonction définie par $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-4$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout $x\in]0;+\infty[$

$$f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times(\ln x)^{2-1}-2\times\frac{1}{x}$$

$$=\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{x}}$

16) La fonction définie par $f(x)=\ln x^2$ est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0:+\infty[$.

En effet $x\mapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, tandis que $X\to\ln(X)$ n'est définie et dérivable que sur $]0;+\infty[$ .Or : $x^2\in]0:+\infty[\Leftrightarrow x\in]-\infty;0[\cup]0:+\infty[$ Pour tout

$x\in]-\infty;0[\cup]0:+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2}$ Donc : $\boxed{\left(\forall x\in]-\infty;0[\cup]0:+\infty[\right)\quad f'(x)=\dfrac{2}{x}}$

17) La fonction définie par $f(x)=(\ln x)^2$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont. En effet $x\to\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, tandis que $X\to X^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in]0;+\infty[$

$f'(x)=2\times\dfrac{1}{x}(\ln x)^{2-1}$ Donc : $\boxed{\left(\forall x\in]0;+\infty[\right)\qquad f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}}$

18) La fonction définie par $f(x)=\ln|1-x^2|$ est définie et dérivable pour toutes les valeurs de x telles que : $1-x^2\neq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

Selon la valeur de x, l'expression de $f(x)$ n'est pas la même. Pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $1-x^2<0$ donc $|1-x^2| = x^2-1$ et par suite $f(x)=\ln(x^2-1)$ alors : $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ Pour tout $x\in]-1;1[$, $1-x^2>0$ donc $|1-x^2|=1-x^2$ et par suite $f(x)=\ln(1-x^2)$ alors : $f'(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2}=\dfrac{2x}{x^2-1}$

Donc Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$: $\boxed{f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}}$

Exercice n°12.

$f(x)=\ln(ax+b)$

1) $f(2)=0$ se traduit par l'équation $\ln(2a+b)=0 \Leftrightarrow 2a+b=1$

De plus $f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}$ donc $f'(3)=\dfrac{3}{4}$ se traduit par

$\dfrac{a}{3a+b}=3 \Leftrightarrow 4a=3(3a+b) \Leftrightarrow 5a+3b=0$

On doit résoudre le système : $\begin{cases}5a+3b=0\\2a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=-5\end{cases}$

Ainsi, $\boxed{f(x)=\ln(3x-5)}$, qui est définie si et seulement si $3x-5>0 \Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$.

Ainsi $D_f=\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$

La fonction f est la composée de deux fonctions strictement croissantes donc est strictement croissante sur $\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$

2) La courbe C passe par le point $A(2;0)$ donc

$f(2)=0 \Leftrightarrow \ln(ax+b)=0$

$\Leftrightarrow 2a+b=1$

La tangente en A a pour coefficient directeur -2 donc $f'(2)=-2$, c'est-à-dire :

$\dfrac{a}{2a+b}=-2 \Leftrightarrow a=-2(2a+b)$

$\Leftrightarrow 5a+2b=0$

On doit résoudre le système : $\begin{cases}5a+2b=0\\2a+b=1\end{cases}$ d'où $\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}$

Ainsi $\boxed{f(x)=\ln(-2x+5)}$

Exercice n°13

Partie I

$\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $g(x)=x^2-2\ln x$

1) g est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ $g'(x)=2x-2\times\frac{1}{x}$

$$=\frac{2x^2-2}{x}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

le signe de $g'(x)$ sera donné par le signe de $(x-1)(x+1)$, expression dont les racines sont −1 et 1.

Ainsi, pour $x\in\left]0;1\right[$, $g'(x)<0$ donc g est strictement décroissante sur $\left]0;1\right[$ et pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$, $g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $\left]1;+\infty\right[$.

2) Sur $\left]0;+\infty\right[$; g atteint donc son minimum lorsque $x=1$,et comme $g(1)=1^2-2\times\underbrace{\ln 1}_{=0}=1$ on peut affirmer que pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$; $\boxed{g(x)>0}$

Partie II

1) Puisque $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, on en déduit par quotient et somme, que $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty}$.

La droite d'équation $x=0$ (c'est à dire l'axe de ordonnées) est donc asymptote verticale à la courbe (C).

2) On transforme l'écriture de $f(x)$: Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

En utilisant $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (la limite de croissance comparée) ; puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$; on déduit par somme que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

De plus pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

on a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=0}$

Interprétation géométrique :

La droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote oblique à (C) en +∞. Pour connaître la position relative de(C)et(Δ) on étudie le signe de la différence $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1+\ln x}{x}$; on a :

$$f(x)-\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow x=e^{-1}$$

Donc $f(x)-\frac{x}{2}>0 \Leftrightarrow x\in\left[e^{-1};+\infty\right[$

Et $f(x)-\frac{x}{2}<0 \Leftrightarrow x\in\left]0;e^{-1}\right]$

Ainsi (C) et (Δ) sont sécantes au point A d'abscisse e^{-1} et d'ordonnée $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}$

De plus ,sur $\left]0;e^{-1}\right]$ la courbe (C) est au- dessous de (Δ) , et sur $\left[e^{-1};+\infty\right[$ la courbe (C) est au-dessus de (Δ)

3) f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{x\times\frac{1}{x}-(1+\ln x)\times 1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2x^2}\left(x^2-2\ln x\right)$$
$$=\frac{1}{2x^2}g(x)$$

On considère la fonction numérique g définie sur par : $g(x)=x^2-2\ln x$

Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$; $\frac{1}{2x^2}>0$ et $g(x)>0$ (question 2 <u>partie I</u>),on conclue que pour tout $x\in]0;+\infty[$; $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f'(x)$	$\Vert$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

4) La droite (Δ) a un coefficient directeur égal à $\frac{1}{2}$. Le coefficient directeur de la tangente (T) en un point d'abscisse a est égal à $f'(a)=\frac{1}{2}-\frac{\ln a}{a^2}$

La tangente (T) sera parallèle à (Δ) si et seulement si ces deux droites ont même coefficient directeur, donc si et seulement si $f'(a)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a^2}=0 \Leftrightarrow a=1$

C'est donc au point B d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1)=\frac{3}{2}$ que la tangente (T) sera parallèle à (Δ).

5) Sur $]0;+\infty[$, f est continue en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont. De plus elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Enfin, puisque $f(]0;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$ Et $0\in]-\infty;+\infty[$

Alors d'après Le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$.

Par définition, $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}=0 \Leftrightarrow \boxed{\ln\alpha=-\frac{\alpha^2}{2}-1}$

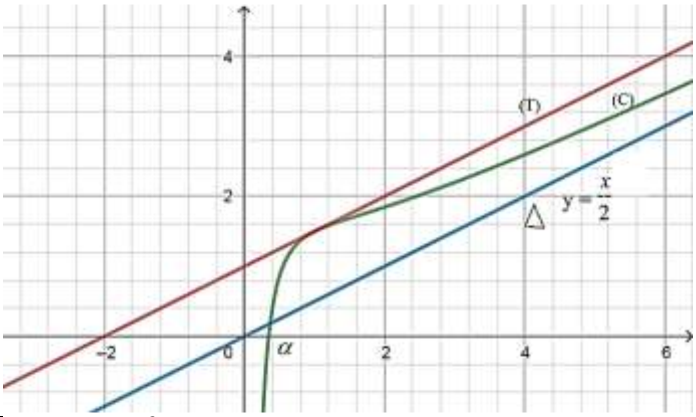
Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est égal à :

$$f'(\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}-\frac{-\frac{\alpha^2}{2}-1}{\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha^2}=1+\frac{1}{\alpha^2}>1$$

Ce coefficient est donc supérieur à 1

Construction de (C) ;(T) et (Δ)



Exercice n°14.

Partie I

$$f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$$

Partie I

1) f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$; $f'(x)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$

$$=1+\frac{1}{2x}$$

Mais comme $x \in \left]0;+\infty\right[$ on a $\frac{1}{2x} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Donc f est donc strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$. De plus :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

On a pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$; $f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x}\right)$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ (car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$)

Tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2) Sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ f est continue et strictement croissante. De plus elle est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$. Enfin, puisque $f\left(\left]0;+\infty\right[\right) = \left]-\infty;+\infty\right[$

Et $0 \in \left]-\infty;+\infty\right[$

Alors d'après Le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ solution de l'équation $f(x) = 0$.

On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = \frac{1}{2}\ln 2 > 0$

D'où : $1 < \alpha < 2$

3) Puisque f est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$,

- pour tout $\left]0;\alpha\right]$ $f(x) \le f(\alpha)$ et $f(\alpha) = 0$ donc $f(x) \le 0$
- pour tout $\left[\alpha;+\infty\right[$ $f(x) \ge f(\alpha)$ et $f(\alpha) = 0$ donc $f(x) \ge 0$

Partie II

1) On $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0 = g(0)$ donc que g est continue en 0. Pour tout

$x \in \left]0;+\infty\right[$ $g(x) = x^2\left(-\frac{7}{8} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\ln x\right)$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc :

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{7}{8} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\ln x\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

Alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$.

2) g est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont, et

pour tout $x > 0$: $g'(x) = \left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x\right)'$

$$=\left(-\frac{7}{8}\times 2x+1-\frac{1}{4}\times 2x\ln x-\frac{1}{4}x^2\times\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}x$$

$$=1-2x-\frac{1}{2}x\ln x$$

Et on : $xf\left(\frac{1}{x}\right)=x\times\frac{1}{x}-2x+\frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=1-2x-\frac{1}{2}x\ln x$$

On a bien l'égalité : $\boxed{g'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)}$

3) On calcule $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$$=-\frac{7}{8\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{4\alpha^2}\ln\alpha$$

Or on a : $f(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha-2+\frac{1}{2}\ln\alpha\Leftrightarrow\ln\alpha=2(2-\alpha)$

En remplaçant $\ln\alpha$ dans l'expression de $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ par $2(2-\alpha)$ on obtient :

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{7}{8\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{4\alpha^2}\times 2(2-\alpha)$$

$$=\frac{-7+8\alpha+4(2-\alpha)}{8\alpha^2}$$

$$=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$$

Donc : $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$

Pour tout $x>0$, $g'(x)$ a le même signe que $f\left(\frac{1}{x}\right)$ on a donc :

■ Si $x\in\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$,on a $\frac{1}{x}>\alpha$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right)>f(\alpha)=0$ d'où $g'(x)>0$

Alors g est croissante sur $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$

■ Si $x\in\left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$,on a : $\frac{1}{x}<\alpha$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right)<f(\alpha)=0$ d'où $g'(x)<0$

Alors g est décroissante sur $\left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$

En fin on a $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}$; $f(\alpha)=0$

Tableau de variation de g

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$	$\searrow$	$-\infty$

4) Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse 1 est $y=g'(1)(x-1)+g(1)$ or $g'(1)=1\times f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)=-1$et $g(1)=\frac{1}{8}$

Ainsi $y=-(x-1)+\frac{1}{8}$

Donc : $\boxed{y=-x+\frac{9}{8}}$

Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse α est $y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$ or $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$et $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$

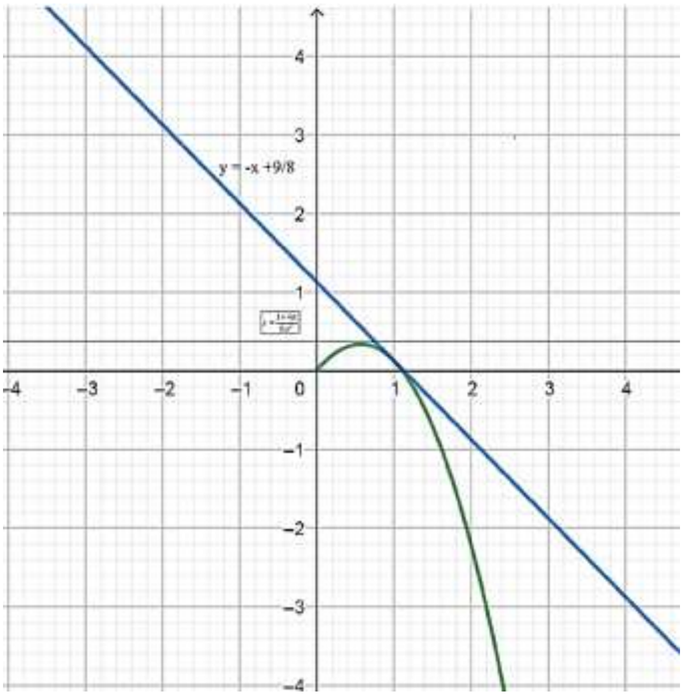
Ainsi $y=-(x-1)+\frac{1}{8}$

Donc : $\boxed{y=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}}$

En reprenant l'écriture $g'(x)=1-2x-\frac{1}{2}x\ln x$; on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)=1$

Graphiquement, cela signifie que Γ admet en O une demi-tangente parallèle à la première bissectrice.

5) Construction de Γ



Exercice n°15

1) $f(x) = x^2 - 5x + \dfrac{1}{x}$

f est continue sur $I =]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $I =]0;+\infty[$, et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + \ln|x|$$

$$= \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + \ln x$$

(on a : $\ln|x| = \ln x$ car $x \in]0;+\infty[$)

Donc : $\boxed{F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 5\dfrac{x^2}{2} + \ln x}$ sur $I =]0;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$

f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

puisque : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

$= x + 1 + \dfrac{1}{x}$ et $x \in]0;+\infty[$

alors : $\boxed{F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \ln x}$

3) $f(x) = \dfrac{7}{x} + \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$ sur $I =]0;+\infty[$

f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$

$$F(x)=7\ln|x|+5\times2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$$

$$=7\ln x+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}$$

alors : $\boxed{F(x)=7\ln x+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=\dfrac{3}{3x-4}$ sur $I=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

.f est continue sur $I=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $I=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$, et pour tout $x\in\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ et puisque : $f(x)=\dfrac{3}{3x-4}=\dfrac{(3x-4)'}{3x-4}$ sous la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

D'où : $F(x)=\ln|3x-4|$ or $x\in\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ donc $3x-4>0$ alors : $\boxed{F(x)=\ln(3x-4)}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $I=]-1;+\infty[$

f est continue sur $]-1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;+\infty[$, et puisque

$f(x)=\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x+1)'}{x+1}$ sous la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

D'où : $F(x)=\ln|x+1|$; or $x\in]-1;+\infty[$ donc $x+1>0$ alors : $\boxed{F(x)=\ln(x+1)}$

6) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ sur $I=]-\infty;-1[$

$F(x)=\ln|x+1|$ or $x\in]-\infty;-1[$ donc $x+1<0$ alors : $\boxed{F(x)=\ln(-x-1)}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$ sur $I=[2;+\infty[$

f est continue sur $I=[2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur I, donc admet des primitives sur $[2;+\infty[$, et puisque

$$f(x)=\frac{1}{3x-5}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{3x-5}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{(3x-5)'}{3x-5}$$

sous la forme $\frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$

D'où : $F(x)=\frac{1}{3}\ln|3x-5|$ or $x\in[2;+\infty[$ donc $3x-5>0$ alors : $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}\ln(3x-5)}$

9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur IR

f est continue sur IR en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur I car le polynôme x^2+2x+2 a un discriminant négatif $(\Delta=-4)$, donc admet des primitives sur IR, et puisque $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\left(x^2+2x+2\right)'}{x^2+2x+2}$$

sous la forme $\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$

D'où : $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|$ or $(\forall x\in IR)$; $x^2+2x+2>0$ alors :

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)}$$

Exercice n°16

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x-2}$$

1) Pour tout $x\in[4;+\infty[$

$$ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(x-2)\times ax+(x-2)\times b+c}{x-2}$$

$$=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$$

$$=\frac{ax^2+(b-2a)x+(c-2b)}{x-2}$$

Ainsi $ax+b+\frac{c}{x-2}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b-2a=-3\\c-2b=-4\end{cases}$

On obtient donc $\boxed{f(x)=2x+1-\frac{2}{x-2}}$

2) f est définie et continue sur $[4;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4;+\infty[$
A partir de l'écriture

Fonction exponentielle

A) Définition et premières conséquences.

Théorème et définition

La fonction logarithme étant continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$; alors

elle admet une fonction réciproque définie et f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(x) = \ln x$.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée exp : $x \mapsto e^x$.

Conséquences

- *La fonction exp est définie sur* $\mathbb{R}$ *, dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $(e^x)' = e^x$ $\quad (exp'(x) = exp(x))$.
- $exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x, $e^x > 0$.

B) Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle caractéristique

Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a \times e^b$

Conséquences

Pour tous réels a et b, et tout entier relatif n,

- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

C) Nombre e.

- *Le nombre exp(1) est noté e et on a :* $e \approx 2{,}72$

D) Variations et courbe de la fonction $x \mapsto e^x$.

1- La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.

2- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(e^x\right)' = e^x$

Or $e^x > 0$ pour tout réel x donc la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

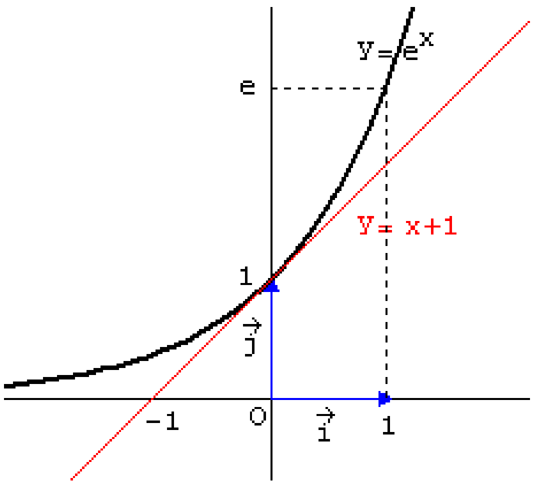
3- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

4- Tableau de Variations de la fonction Exp

x	$-\infty$	0	1
	$+\infty$		
e^x	$+$		
e^x	$+\infty$	1	e
	0		

5- Courbe représentative (C)

- l'axe des abscisses est asymptote à (C) en $-\infty$.



- La fonction $x \mapsto x+1$ est la meilleure approximation affine de la fonction exp au voisinage de 0.

F) Equations et inéquations.

- La fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

pour tous réels a et b :
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

G) Des limites à connaître.

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0\ ;\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$$

H) Croissances comparées des fonctions exponentielle et puissance.

Théorème

Pour tout entier strictement positif n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

« à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x »

I) Fonction composée $\exp \circ u$.

Dérivée de $\exp \circ u$

Théorème :

si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée

$x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pur tout $x \in I$: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

Primitive de $u' e^u$

Théorème : si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors

$\boxed{\text{une primitive de } u' e^u \text{ sur } I \text{ est } e^u}$

FONCTION EXPONENTIELLE EXERCICES CORRIGES

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x + e^{-x}$

1. Justifier que C_f passe par le point A de coordonnées $(0;1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f. On précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

CORRECTION

1. $f(0) = 0 + e^0 = 1$

Donc la courbe C_f passe par le point A de coordonnées (0;1).

f est définie et dérivable sur IR et : $f'(x) = 1 - e^{-x}$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-x} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow -x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Pour la limite en $-\infty$ on a une forme indéterminée du type «$+\infty-\infty$». On peut lever cette indétermination en mettant x en facteur :

$$f(x)=x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

En posant $X=-x$ on voit que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{e^{X}}{X}=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=-\infty$ et par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=+\infty$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 2

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=e^{x}$ et $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$.

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel x, $h(x)=x\left(\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{2}{x}\right)$

En déduire la limite de la fonction h en$+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur IR.

Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de xx.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur IR.

e. En déduire que, pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}}-1\geqslant x+1$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes C_f et C_g Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$

.Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g .

CORRECTION

Soient $f(x)=e^x$ et $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$ deux fonctions définies sur IR.

1) On voit aisément que $f(0)=g(0)=1$, ce qui implique que les courbes représentatives C_f et C_g de f et g ont un point commun d'abscisse 0 et d'ordonnée 1. Le coefficient directeur des tangentes en ce point à C_f et C_g est donnée, respectivement, par les valeurs de $f'(0)$ et $g'(0)$. on a : $f'(x)=e^x$ d'où $f'(0)=1$ et $g'(x)=e^{\frac{x}{2}}$ d'où $g'(0)=1$. Donc les tangentes en $(0;1)$ à C_f et C_g ayant même coefficient directeur elles sont confondues en une seule droite Δ dont on détermine facilement l'équation : $y=x+1$.

2) Soit $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$ définie sur IR.

a) En observant que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2}}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.

b) On peut écrire $h(x)=x\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\dfrac{2}{x}\right)$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

c) On calcule la dérivée de h : $h'(x)=e^{\frac{x}{2}}-1$. La fonction $x\mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est croissante sur IR et l'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$. On a $h'(0)=0$ et donc : $h'(x)<0$ pour $x<0$ et $h'(x)>0$ pour $x>0$

d) En remarquant que $h(0)=0$, on peut dresser le tableau de variation de h sur IR:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) D'après le tableau ci-dessus, on voit que $h(x)\geq 0$ pour tout $x\in IR$. C'est à dire $2e^{\frac{x}{2}}-x-2\geq 0$ d'où l'on tire : $2e^{\frac{x}{2}}-1\geq x+1$.

f) On en déduit que Δ est au -dessous de C_g sauf pour $x=0$ où elle est tangente à C_g.

3. a) $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2=e^x-2e^{\frac{x}{2}}+1$

b) On remarque que $f(x)-g(x)=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}+1$. De plus, étant un carré qui s'annule pour $x=0$, alors $f(x)-g(x)\geq 0$ sur IR. D'où l'on déduit que : $f(x)\geq g(x)$ pour tout $x\in IR$, et C_f est au -dessus de C_g sauf pour $x=0$ où les deux courbes sont tangentes.

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=e^{x}-x$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction f.

2. En déduire que pour tout réel x : $e^{x}>x$.

Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

3. A l'aide de la question précédente, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

PARTIE B

Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=e^{x}-\frac{x^{2}}{2}$

1. Etudier le sens de variation de la fonction g.

Montrer que $g(x)>0$ pour tout $x>0$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

CORRECTION

PARTIE A

1. $f'(x)=e^{x}-1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x}-1>0 \Leftrightarrow e^{x}>1$

$\Leftrightarrow e^{x}>e^{0} \Leftrightarrow x>0$

car le fonction exponentielle est strictement croissante.

Par ailleurs $f(0)=e^{0}-0=1$.

On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. Le tableau précédent montre que pour tout $x \in IR$, $f(x) > 0$, c'est à dire $e^x > x$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ Donc d'après le <u>théorème de comparaison</u> pour les limites infinies
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

3. On pose $X = -x$. Lorsque $x \to -\infty$, $X \to +\infty$ et : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X}$

Or d'après la question précédente $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par quotient : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$

En conclusion : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

<u>PARTIE B</u>

1. $g'(x) = e^x - x = f(x) > 0$ pour tout $x \in IR$.
Donc la fonction g est croissante sur IR
On en déduit que pour $x > 0$, $g(x) > g(0) = 1 > 0$

Pour x strictement positif $g(x) > 0$ càd $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$ donc $e^x > \frac{x^2}{2}$

Par conséquent : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, d'après le <u>théorème de comparaison</u> pour les limites infinies : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On pose, là encore $X = -x$: Lorsque $x \to -\infty$, $X \to +\infty$ et :
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-Xe^{-X}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{-X}{e^X}\right)$
Or d'après la question précédente
$\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc par quotient : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
En conclusion : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

EXERCICE 4

<u>Partie A</u>

Soit f la fonction définie et dérivable sur IR par : $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O. Pour tout réel x positif ou nul, on note : **M** le point de C de coordonnées $(x; f(x))$; **P** le point de coordonnées $(x;0)$ et **Q** le point de coordonnées $(0; f(x))$. Exprimer l'aire du rectangle **OPMQ** en fonction de x.

<u>Partie B</u>

Soit g la fonction g définie sur R par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$.
1. Etudier les variations de la fonction g.

2. a. Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans IR une seule solution α. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$.

d. Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de

Partie C

Soit h la fonction définie et dérivable sur IR par : $h(x)=\dfrac{4x}{e^{x}+1}$.

Démontrer que pour tout réel x, $h'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
En déduire les variations de la fonction h.

Partie D

1. Montrer que l'aire du rectangle **OPMQ** est maximale lorsque **M** a pour abscisse α.
Déterminer un encadrement de cette aire maximale.
2. Supposons alors que **M** a pour abscisse α. La tangente T en **M** à la courbe C est-elle parallèle à la droite (PQ).

CORRECTION

Partie A

$f(x)=\dfrac{4}{e^{x}+1}$ Pour tout réel x positif ou nul, on note : **M** le point de C de coordonnées $(x; f(x))$; **P** le point de coordonnées $(x;0)$ et **Q** le point de coordonnées $(0; f(x))$.

En utilisant les coordonnées des points **O**, **P**, **M** et **Q** et sachant que le repère est orthonormé on a $OP = x\ (x>0)$ et $OQ = f(x)=\dfrac{4}{e^{x}+1}$ 1 Ainsi l'aire du rectangle OPMQ est $OP\times OQ=\dfrac{4x}{e^{x}+1}$.

Partie B

$g(x)=e^{x}-xe^{x}+1$

1. g est une fonction dérivable sur IR comme somme et produit de fonctions dérivables sur IR.

Soit $x\in IR$, $g'(x)=e^{x}-(1\times e^{x}+x\times e^{x})=-xe^{x}$. Puisque $e^{x}>0$ sur IR, le signe de $g'(x)$ est le signe contraire de x.

Ainsi, sur $]-\infty;0[$ $g'(x)>0$, *sur* $]0;+\infty[$ $g'(x)<0$ *et* $g'(0)=0$. *La fonction g est donc strictement croissante sur* $]-\infty;0[$ *puis strictement décroissante sur* $]0;+\infty[$.

2. a. ⊛ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$: *On sait que* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$. *Ainsi,* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$

⊛ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$: *On est en présence d'une forme indéterminée. Au voisinage de +∞,* $g(x)=e^x(1-x)+1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ *par produit et somme on obtient* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

b. *Tableau de variation de g :*

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	
$g(x)$	$1 \nearrow$	2	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$

$g(0)=e^0-0e^0+1=2$

■*g est continue et strictement croissante sur* $]-\infty;0]$.*L'image de l'intervalle* $]-\infty;0]$ *par g est l'intervalle* $]1;2]$. *Or,* $0\notin]1;2]$. *L'équation* $g(x)=0$ *n'admet pas de solution sur* $]-\infty;0]$.

■*g est continue sur IR car elle est dérivable sur IR. g est continue et strictement décroissante sur* $[0;+\infty[$ *L'image de l'intervalle* $[0;+\infty[$ *par g est l'intervalle* $]-\infty;2]$. *Et* $0\in]-\infty;2]$. *D'après TVI, l'équation* $g(x)=0$ *admet une unique solution* α *sur* $[0;+\infty[$. *On en déduit que l'équation* $g(x)=0$ *admet exactement une solution* α *dans IR.*
On a $g(1,27)\approx 0,03>0$ $g(\alpha)=0$ *et* $g(1,28)\approx -0,007<0$ *donc* $1,27<\alpha<1,28$

c. $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow e^\alpha-\alpha e^\alpha+1=0$

$\Leftrightarrow e^\alpha(1-\alpha)=-1$

$\Leftrightarrow e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$

d. *En utilisant le tableau de variation de la fonction g, on a :* $g(x)>0$ *pour* $x\in]-\infty;\alpha[$
$g(x)=0$; $g(x)<0$ *pour* $x\in]\alpha;+\infty[$ *et* $g(\alpha)=0$.

Partie C

$h(x)=\frac{4x}{e^x+1}$. h est une fonction dérivable sur IR $(e^x+1\neq 0 \quad \forall x\in IR)$ comme quotient de fonctions dérivables.

Soit $x\in IR$: $h'(x)=\frac{4(e^x+1)-4xe^x}{(e^x+1)^2}$

$$=\frac{4e^x+4-4xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{4(e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$$

Ainsi, $h'(x)=\frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$, $(\forall x\in \mathbb{R})$.

Mais, $(e^x+1)^2>0$ sur IR donc $h'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur IR. En utilisant le signe de $g(x)$ déterminé à la question **Partie B** - 2.d., on peut dire que h est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

Partie D

1. D'après la partie A -, l'aire du triangle OPMQ est $h(x)$ pour tout réel $x>0$. En utilisant les variations de la fonction h, h admet un maximum en $\alpha\,(\alpha>0)$, c'est-à dire lorsque M a pour abscisse α.$h(\alpha)=\frac{4\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}\left(\text{car } e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}\right)$

$$=\frac{4\alpha}{\frac{\cancel{1}+\alpha-\cancel{1}}{\alpha-1}}$$

$$=\frac{4\alpha(\alpha-1)}{\alpha}$$

$$=4(\alpha-1)$$

Et on a : $1{,}27<\alpha<1{,}28\Rightarrow 1{,}08<4(\alpha-1)<1{,}12$

$$\Rightarrow 1{,}08<h(\alpha)<1{,}12$$

. Supposons alors que M a pour abscisse α. La tangente T en M à la courbe C est parallèle à la droite (PQ) si, et seulement si les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux. Le coefficient directeur de la tangente T en M à la courbe C est

$f'(\alpha)$. f est dérivable sur IR comme quotient de fonctions dérivables, et pour $x \in IR$

$f'(x) = \dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$ Sachant que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$,

$$f'(\alpha) = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$$

D'où $f'(\alpha) = \dfrac{-4 \times \dfrac{1}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+1\right)^2}$

$$= \frac{\dfrac{-4}{\alpha-1}}{\left(\dfrac{\cancel{1}+\alpha-\cancel{1}}{\alpha-1}\right)^2}$$

$$= -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

Le coefficient directeur de la droite (PQ) est : $\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{f(\alpha)-0}{0-\alpha} = -\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

d'où $-\dfrac{\dfrac{4}{e^\alpha+1}}{\alpha} = \dfrac{-4}{\alpha(e^\alpha+1)} = \dfrac{-4}{\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$

On en déduit que les deux droites sont parallèles lorsque M a pour abscisse α.

FONCTION EXPONENTIELLE EXERCICES NON CORRIGES

EXERCICE 1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{2}{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln\left(e^{2x}-e^{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x-x-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^3e^x-x-1}$

$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^x-1}{x-1}$

EXERCICE 2

f et g sont les fonctions d´définies sur IR par : $f(x)=-x^2e^x$ et $g(x)=\left(x^2-x-1\right)e^x$

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g.
2. Déterminer la position relative de C_f et C_g.
3. Déterminer les limites de f et g en $-\infty$ et $+\infty$.
4. Dresser les tableaux de variations de f et g.

EXERCICE 3

Soit f la fonction d´définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm et Δ la droite d'équation $y=2x-2$.

1. a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de C et Δ.
2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=xe^{-x}+2\left(1-e^{-x}\right)$.
   b) En d´enduire que, pour tout réel x positif, $f'(x)>0$.
   c) Préciser la valeur $f(0)$, puis établir le tableau de variation de f. 3. Avec le plus grand soin, tracer C et Δ dans le même repère.
4. Déterminer le point de A de C où la tangente `a C est parallèle à Δ. Tracer cette tangente dans le repère précédent.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonale.

1. Démontrer que f est une fonction impaire. Que peut-on en d´déduire pour la courbe C_f

Montrer que pour tout réel x, $f(x)=x+1-\frac{2}{1+e^{-x}}$. En d´déduire la limite de f en $+\infty$.

3. a) Montrer que pour tout réel x ; $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^{x}+1}$.

En d´déduire que la droite d'équation Δ d'équation $y=x-1$ est asymptote à C_f en$+\infty$

b) préciser la position de C_f par rapport à Δ.

EXERCICE 5

On considère la fonction f d´définie sur IR par : $f(x)=\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}$, et on d´désigne par C sa courbe représentative.

1. Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul , $e^{-x}\leq e^{x}$.
3. a) Déterminer les limites de f en$+\infty$.

b) Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$, et tracer l'allure de C.

EXERCICE 6

f est la fonction définie sur IR par : $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$. C est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de f en$+\infty$ Que peut-on en d´déduire ?

b) Déterminer la limite de f en$-\infty$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

b) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 7

g_1 et g_2 sont les fonctions d´définies sur IR par $g_1(x)=xe^{-x}$ et, $g_2(x)=x^2e^{-x}$

1. a) Etudier les limites de g_1 et g_2 en $-\infty$ et$+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Etudier le sens de variation de g_1 et g_2

2. Dans un repère orthonormé du plan, on note C_1 et C_2 les courbes représentatives de g_1 et g_2

a) préciser la position relative des deux courbes.

b) Tracer les deux courbes.

3. a) Donner une équation de la tangente à la courbe C_1 au point d'abscisse a (a réel).

b) Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point N.

Déterminer en fonction de a, l'ordonnée de N.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-e^{-x}$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{e},1\right[$

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \left]\frac{1}{e},1\right[$ et

$(\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=e^{-u_n}$

a) Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N}): u_n \in \left]\frac{1}{e},1\right[$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}): |u_{n+1}-\alpha| < e^{\frac{-1}{e}}|u_n-\alpha|$

c) Déduire $\lim u_n$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $v_n=\prod_{k=1}^{n} u_k$

Montrer que : $v_n = e^{-\sum_{k=0}^{n-1} u_k}$ et en déduire $\lim v_n$

EXERCICE 9

On considère les fonctions ch et sh définies par $:ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}): sh'(x)=ch(x)$ et $ch'(x)=sh(x)$

puis donner le tableau de variation des fonctions ch et sh

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}): ch^2(x)-sh^2(x)=1$

b) Montrer que :$\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)$:

$ch(a+b)=ch(a)ch(b)+sh(a)sh(b)$ et $sh(a+b)=sh(a)ch(b)+ch(a)sh(b)$

puis déduire $ch(2a)$ et $sh(2a)$ en fonction de $ch(a)$ et $sh(a)$

3) a) Montrer que la fonction sh admet une fonction réciproque sh^{-1}

b) Montrer que sh^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :$\left(sh^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

c) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}): sh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

4) Soit f la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[1,+\infty[$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que :$(\forall x\in]1,+\infty[):\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

c) Montrer que : $(\forall x\in[1,+\infty[):\left(f^{-1}\right)(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

EXERCICE 10

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x)=x^{\frac{x+1}{x}} & ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Étudier la continuité de f à droite en 0

2) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat trouvé

3) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de la courbe (C) en $+\infty$

4) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1+x-\ln x$

Étudier les variations de g puis déduire le signe de $g(x)$

5) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[): f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}f(x)$ puis donner le tableau de variation de f.

6) construire la courbe (C)

EXERCICE 11

A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x} & ; x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue à droite en 0

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}$

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+): 0\le h''(x)\le x$

b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+): 0\le h(x)\le\dfrac{x^3}{6}$

c) En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0

B) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} & ; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*): f'(x)\le 0$

2) a-Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+): f(x)=2g(2x)-g(x)$

b- En déduire que f est dérivable à droite en 0

3) Donner le tableau de variation de f

4) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

EXERCICE 12

Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\ge 2$ et soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\dfrac{x}{n}-e^{-nx}$

(C_n) est la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

b- Étudier les branches infinies de la courbe (C_n)

2) Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f_n

3) a- Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution α_n dans $\mathbb{R}$

b- Montrer que : $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)<0$; pour tout $n\ge 2$

c- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}): e^x\ge x+1$, puis en déduire que $f_n(1)>0$.

3) Montrer que : $\dfrac{1}{n}<\alpha_n<1$; pour tout $n\ge 2$

4) Construire la courbe (C_2) (on prend $\alpha_2\simeq 0{,}6$

5) a-Montrer que : $(\forall n\geq 2): f_{n+1}(\alpha_n)=\dfrac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n}-\dfrac{1}{n}-1\right)$

b- En déduire que : $(\forall n\geq 2): f_{n+1}(\alpha_n)\geq 0$

c-Montrer que la suite (α_n) est convergente

6) a-Montrer que $(\forall n\geq 2): \dfrac{1}{n^2}<e^{-n\,\alpha_n}<\dfrac{1}{n}$

b- déduire que : $(\forall n\geq 2): \dfrac{\ln(n)}{n}<\alpha_n<\dfrac{2\ln(n)}{n}$

c- calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

EXERCICE 12

A) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$

1) Déterminer D_f domaine de définition de f

2) Étudier les variations de f et en déduire son signe sur D_f

B) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

1) Déterminer D_g domaine de définition de g

2) Étudier les variations de g

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*): 2\leq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leq e$

4) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*): \left(\dfrac{n+1}{e}\right)^n\leq n!\leq\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$

5) Soit $a\in\mathbb{R}$. Déduire de ce qui précède $\lim\dfrac{a^n}{n!}$

C) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on considère la fonction h_n définie par : $h_n(x)=-e^{-x}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)$

1) Déterminer la dérivée de la fonction h_n

2) Soit $a\in\mathbb{R}^*$. En utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction h_n entre 0 et a,

Montrer que : $\left|1+a+\dfrac{a^2}{2!}+...+\dfrac{a^n}{n!}-e^a\right|\leq e^{|a|}\times\dfrac{|a|^{n+1}}{n!}$

3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k!}$