Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ *par :* $f(0)=1$ *et* $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ *; pour tout* $x>0$ *, et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. *Montrer que f est continue à droite en* 0.
2. a) *Montrer que pour tout* $x\in[0;+\infty[$ *on a :* $x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$
   b) *Etudier la dérivabilité de f en* $x_0=0$, *puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.*
3. *Soit h la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $h(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)$
   a) *Etudier le sens de variation de h, puis en déduire le signe de h sur* $[0;+\infty[$
   b) *Montrer que :* $(\forall x\in]0;+\infty[);\ f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$
   c) *Dresser le tableau de variations de f.*
4. *Représenter* (C_f) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
5. a) *Montrer que f est une bijection de* $[0;+\infty[$ *vers un intervalle J à déterminer*
   b) *Montrer que* f^{-1} *est dérivable en* 1 *et calculer* $\left(f^{-1}\right)'(1)$
   c) *Représenter* $\left(C_{f^{-1}}\right)$ *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 2:

I. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$

On considère la fonction h_n *définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :* $h_n(x)=n\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$

1. *Etudier les variations de* h_n.
2. *En utilisant la valeur de* $h_n(0)$, *déterminer le signe de* $h_n(x)$ *sur l'intervalle* $]-1;+\infty[$

II. *A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction* f_n *définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :* $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$ *; et soit* (C_n) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. *Etudier les branches infinies de* (C_n).
2. a) *Pour tout* $x\in]-1;+\infty[$, *vérifier que :* $f_1'(x)=h_1(x)$ *et que* $\forall n>1$ *;* $f_n'(x)=x^{n-1}h_n(x)$
   b) *Dresser le tableau de variations de* f_n.
3. *Etudier la position relative de* (C_{n+1}) *et* (C_n).

4. *Représenter* (C_1) *et* (C_2) *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 3

I. *Soit g la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $g(x)=2x^3-1+2\ln|x|$

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2. a) *Calculer* $g'(x)$, *pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$.

   b) *Dresser le tableau de variations de g.*

3. *Montres que l'équation* $g(x)=0$ *admet une unique solution* $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

4. *Etudier le signe de* $g(x)$ *sur* $\mathbb{R}^*$.

II. *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x)=2x-\dfrac{\ln|x|}{x^2}$

Soit (C_f) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, *puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

2. a) *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b) *Etudier les branches infinies de* (C_f)

   c) *Etudier la position relative de* (C_f) *et la droite* (D) *d'équation* $y=2x$.

3.a) *Calculer* $f'(x)$, *pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$.

   b) *Dresser le tableau de variations de f*

   c) *Montrer que :* $f(\alpha)=3\alpha-\dfrac{1}{2\alpha^2}$

   d) *Représenter* (C_f) *(on prend* $\alpha\simeq 0{,}85$*)*

II. *Soit m un réel supérieur à* 1.

1. *Montrer que la fonction H définie sur* $[1;+\infty[$ *Par :* $H: x\mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x}$ *est une primitive de la fonction h définie sur* $[1;+\infty[$ *Par :* $h: x\mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$

2. a) *On désigne par* $A(m)$ *l'intégrale :* $\int_1^m |f(x)-2x|dx$. *Calculer* $A(m)$

   b) *Déterminer* $\lim\limits_{m\to+\infty} A(m)$.

Exercice 4 - *Session de Rattrapage 2018*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ *par :* $f(0)=0$ *et* $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$ *; si* $x>0$.

(C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(Unité 2m)*

1. a) *Montrer que f est continue à droite de* 0.

   b) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, *puis interpréter géométriquement le résultat obtenu*

2. a) *Etudier la dérivabilité de f à droite en* 0, *puis interpréter géométriquement le résultat*

Obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$, pour tout $x\in]0;+\infty[$.

c) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$,en déduire que : $(\forall x\in]0;1])$;

$$0\le\sqrt{x}(\ln x)^2\le\left(\frac{4}{e}\right)^2.$$

d) Représenter la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3. Pour tout $x\ge0$, on pose : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x\ge0$; en déduire les variations de F sur $[0;+\infty[$.

4. a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $I(x)=\int_x^1\sqrt{t}\ln t\,dt$, pour tout $x\ge0$.

b) Montrer que : $\forall x>0$; $F(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2+\frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x-\frac{16}{27}x\sqrt{x}+\frac{16}{27}$

c) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine délimité par (C_f) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

5. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$

a) Montrer que la suite (u_n) est bornée et strictement croissante. .

b) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5 -Session Normale 2018

I. a) Montrer que : $\forall x>0$; $\int_0^x\frac{t}{1+t}dt=x-\ln(1+x)$

b) On pose : $u^2=t$; montrer que : $\forall x>0$; $\int_0^x\frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^{x^2}\frac{t}{1+\sqrt{u}}du\right)$

c) En déduire que : $\forall x\in]0;+\infty[$; $\frac{1}{2(1+x)}\le\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\le\frac{1}{2}$

d) Déterminer $\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

II. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases}f(x)=\frac{x+1}{x}\ln(1+x)\ \ ;\ si\ x\ne0\\ f(0)=1\end{cases}$

1. Montrer que f est continue à droite en 0.
2. Montrer que f est dérivable à droite en 0 (utiliser le résultat de la question(**I-** 1.d))
3. Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

b) En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

c) Vérifier que: $f\left(\left[0;+\infty\right[\right)=\left[1;+\infty\right[$

5. Représenter $\left(C_f\right)$.

III. 1. Soit g la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par : $g(x)=f(x)-x$

a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right);\ 0\leq f'(x)\leq\frac{1}{x^2}$

b) En déduire que g est strictement décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$, puis montrer que:

$g\left(\left]0;+\infty\right[\right)=\left]-\infty;1\right[$

c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$

2. Soit $a\in\left]0;+\infty\right[$

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par : $u_0=a$ et $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\ u_n>0$

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ ;\ \left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right|$

c) Montrer par récurrence que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\ \left|u_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|u_0-\alpha\right|$

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

<u>Exercice 6</u>

Sait f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2-\ln^2 x}}$

Et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. a) Déterminer D_f le domaine de définition de f

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f

c) Etudier les branches infinies de $\left(C_f\right)$.

2. a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x\in D_f$

b) Dresser le tableau de variations de f.

3. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse e.

4. Représenter $\left(C_f\right)$ dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (On prend $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$)

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)<x$

II- Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par : $u_0\in\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\left(u_n\right)$ est constante deux pour valeurs du terme Me à déterminer

2. On prend: $u_0\in\left]\frac{1}{e};e\right[$

a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\ \frac{1}{e}\leq u_n\leq e$

b) Montrer que $\left(u_n\right)$ est décroissante

c) En déduire que $\left(u_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7- *Rattrapage 2016-*

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n *définie sus l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par :* $f_n(x)=\ln(x)-\dfrac{n}{x}$

Et (C_n) *la courbe représentative de* f_n *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) *Étudier les deux branches infinies de* (C_n)

   b) *Etudier les variations de* f_n *sur* $]0;+\infty[$, *puis dresser son tableau de variations.*

   c) *Représenter* (C_n) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2. *Montrer que la fonction* f_n *est une bijection de* $]0;+\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$.

3. a) *Montrer que pour tout entier* $n\geq 1$, *il existe un réel unique* $\alpha_n\in]0;+\infty[$ *tel que :* $f_n(0)=0$

   b) *Comparer* $f_n(x)$ *et* $f_{n+1}(x)$ *pour tout* $x\in]0;+\infty[$

   c) *Montrer que la suite* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, *est croissante.*

4. a) *Montrer que :* $(\forall x\in]0;+\infty[);\ \ln x<x$

   b) *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$

5. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on pose :* $I_n=\dfrac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}f_n(t)\,dt$

   a) *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ (\exists c_n\in[\alpha_n;\alpha_{n+1}]);\ I_n=f_n(c_n)$

   b) *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ 0\leq I_n\leq\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

   c) *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$