EXERCICE1 (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif ; et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par:

$(\forall(x,y)\in IR^2)\ (\forall(a,b)\in IR^2)$

$(x+yi)*(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)i$

1- a) Montrer que la loi * est commutative sur $\mathbb{C}$

b) Montrer que la loi * est associative sur $\mathbb{C}$

c) Montrer que la loi * admet un élément neutre e que l'on déterminera.

d) Soit $((x,y)\in IR^*\times IR)$.

Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\frac{1}{x}-\frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$.

2- On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par: $E=\{x+yi\ /\ x\in IR_+^*;y\in IR\}$

a) Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$

b) Montrer que $(E;*)$ est un groupe commutatif.

3- On considère le sous-ensemble G de E défini par:

$G=\{1+yi\ /\ y\in IR\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E;*)$

4- On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/\ x\in IR_+^*;y\in IR\right\}$

a) Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_2(IR)$.

b) Soit φ l'application de E vers F qui à tout nombre complexe $x+yi$ de E fait correspondre la matrice $M(x^2,y)=\begin{pmatrix}x^2&y\\0&x^2\end{pmatrix}$ de F

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E;*)$ vers $(F;\times)$

c) En déduire que $(F;\times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE2 :(3.5 points)

Soit m un nombre complexe non réel $(m\in\mathbb{C}-IR)$

I- On considère dans $\mathbb{C}$,l'équation d'inconnue z définie par : (E): $z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$

1- a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul

b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E)

2- On suppose dans cette question que $m=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

a) Déterminer le module et un argument de z_1+z_2

b) Montrer que si $z_1 z_2 \in IR$ *alors* $z_1 + z_2 = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

On considère les points suivants : A le point d'affixe $a = 1+i$ *, B le point d'affixe* $b = (1+i)m$ *,C le point d'affixe* $c = 1-i$ *, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *; Ω le milieu du segment* $[CD]$.

1- a) Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$

b) Calculer $\frac{b-a}{\omega}$

c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ *et que* $AB = 2O\Omega$

2- La droite $(O\Omega)$ *coupe la droite* (AB) *au point H d'affixe h.*

a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ *est un réel et que* $\frac{h}{b-a}$ *est un imaginaire pur.*

b) En déduire h en fonction de m.

EXERCICE3 *: (3 points)*

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.
Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

1- On suppose dans cette question que 2969 *ne divise pas n*

a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que:
$(\exists u \in \mathbb{Z})\,; u \times n \equiv 1[2969]$

b) En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1[2969]$ *et que* $(u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$ *)*

c) Montrer que 2969 *ne divise pas* $u \times m$

d) En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$

2- a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 *divise n.*

b) Montrer que : $m \equiv 0[2969]$ ***et*** $n \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n^8 + m^8 = 0[2969]$.

EXERCICE4 *: (10 points)*

PARTIE I:

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right)$

(C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2- a) Montrer que f est dérivable sur IR et que: $(\forall x \in IR)$ *;* $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$

b) Etudier les variations de f sur IR , puis donner son tableau de variations

c) Montrer qu'il existe un unique réel α *dans l'intervalle* $\left]\frac{3}{2};2\right[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$

(On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4{,}5$ *)*

d) Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha$

3- a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f' montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f''(x_0)=0$

b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'', montrer que, pour tout réel x différent de x_0 de l'intervalle $[0,1]$ on a : $\dfrac{f''(x_0)}{x-x_0}>0$

c) En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

4- a) Etudier les branches infinies de la courbe (C)

b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$, $f(1)=-0,5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)

5- a) Vérifier que: $(\forall x\in]-\infty;\alpha])\quad f(x)\le 0$

b) Montrer que : $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\dfrac{2\alpha(\alpha^2-3)}{3}$, en déduire que : $\dfrac{2}{3}<\alpha\le\sqrt{3}$

c) Calculer en fonction de α, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives: $y=0$, $x=0$ et $x=\alpha$

PARTIE II:

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$u_0<\alpha$ et $u_{n+1}=f(u_n)+u_n\ (\forall n\in IN)$

1- a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in IN)\quad u_n<\alpha$ (utiliser la question 5-a) de la PARTIE I)

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante

2- On suppose que : $0\le u_0$, et on pose : $(\forall x\in IR)$: $g(x)=e^{-x}+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$

a) Montrer que : $(\forall x\in IR)\quad g(x)>0$ (On prendra : $\ln 2=0.69$)

b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n\in IN)\quad 0\le u_n$

(On remarque que : $f(x)+x=4xg(x)$)

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- On suppose que $u_0<0$

a) Montrer que $(\forall n\in IN)$; $u_{n+1}-u_n\le f(u_0)$

b) Montrer que $(\forall n\in IN)$; $u_n\le u_0+nf(u_0)$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$