

Série d'exercices sur les ensembles

Exercice 1 - Deux descriptions d'un même ensemble

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t+1; 4t+3) / t \in \mathbb{R}\}$.

Démontrer que $A = C$.

Indication

Procéder par double inclusion.

Corrigé

On va procéder par double inclusion. Le plus facile est de prouver que $C \subset A$. En effet, prenons un couple $(x; y) \in C$. Alors on sait qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t+1$ et $y = 4t+3$.

Mais alors $4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$,

et donc on a bien $(x; y) \in A$.

Réciproquement, prenons $(x; y) \in A$ et prouvons que $(x; y) \in C$. C'est plus difficile, car il faut construire un réel t . On va procéder par analyse-synthèse. Si un tel t existe, alors nécessairement on doit avoir $t = x - 1$. Posons donc $t = x - 1$. Alors, $y = 4x - 1 = 4(t+1) - 1 = 4t + 3$. On a donc bien $(x; y) = (t+1; 4t+3)$ et $(x; y) \in C$.

Exercice 2 - Partie d'une union

Est-ce que $C \subset A \cup B$ entraîne $C \subset A$ ou $C \subset B$?

Indication

Faire un dessin et donner un contre-exemple.

Corrigé

Non! Prendre par exemple $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 4\}$ et $C = \{2; 3\}$.

Exercice 3 - Lois de Morgan

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Pour $X \subset E$, on note X^c le complémentaire de X dans E . Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2. $(A^c)^c = A$

3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Indication

Raisonner à chaque fois par double inclusion.

Corrigé

On raisonne à chaque fois par double inclusion.

Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Alors $(x \in A \text{ et } x \in B)$ ou $x \in C$. Si $x \in A$ et $x \in B$ alors $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, et l'inclusion est prouvée. Sinon, c'est que $x \in C$, et dans ce cas on a aussi $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$.

Réciproquement, si $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, on distingue deux cas :

Si $x \in C$, alors $x \in (A \cap B)$ ou $x \in C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.

Sinon, $x \notin C$. Mais alors, puisque $x \in A \cup C$, on a $x \in A$.

De même, puisque $x \in B \cup C$, on a $x \in B$. Ceci prouve que $x \in (A \cap B)$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.

On suppose que $x \in (A^c)^c$. Alors $x \notin A^c$, et donc $x \in A$.

Réciproquement, si $x \in A$, alors $x \notin A^c$ et donc $x \in (A^c)^c$.

Soit $x \in (A \cap B)^c$. Alors $x \notin A \cap B$. On a donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in A^c$ ou $x \in B^c$.

On en déduit que $x \in A^c \cup B^c$. Réciproquement, soit $x \in A^c \cup B^c$. Alors $x \in A^c$ ou $x \in B^c$, c'est-à-dire $x \notin A$ ou $x \notin B$. En particulier, $x \notin A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B)^c$.

On peut présenter aussi les raisonnements précédents sous forme d'équivalence. C'est ce que l'on fait pour ce dernier exemple : $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B$

$$\Leftrightarrow x \notin B \text{ et } x \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \in A^c \text{ et } x \in B^c.$$

$$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$$

Exercice 4 - Réunion et intersection égales

Soit E un ensemble et A, B, C trois éléments de $P(E)$.

Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.

Démontrer que, si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$.

Une seule des deux conditions suffit-elle?

Indication

Prendre $x \in A$ et démontrer par l'absurde que $x \in B$.

Prendre $x \in B$ et distinguer les cas $x \in A$ et $x \notin A$.

Corrigé

Par symétrie du problème en A et B , il suffit de démontrer que $A \subset B$. Prenons $x \in A$ et supposons que $x \notin B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$ et donc les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ sont différents, une contradiction. C'est donc que $x \in B$.

Par symétrie du problème en B et C , il suffit de démontrer l'inclusion $B \subset C$. Soit donc $x \in B$.

On distingue deux cas :

ou bien $x \in A$.

Dans ce cas, $x \in A \cap B = A \cap C$, et donc $x \in C$.

ou bien $x \notin A$.

Dans ce cas, $x \in A \cup B = A \cup C$ et donc $x \in A$ ou $x \in C$. Puisqu'on est dans le cas $x \notin A$, on en déduit que $x \in C$.

Dans tous les cas, on a démontré $x \in C$, et donc $B \subset C$.

Une seule des deux conditions n'est pas suffisante :

Si on suppose seulement que $A \cup B \subset A \cup C$, il suffit de prendre $A = \{1; 2\}$, $B = \{1\}$ et $C = \{2\}$.

On a bien $A \cup B \subset A \cup C$, mais on n'a pas $B \subset C$.

Si on suppose seulement que $A \cap B \subset A \cap C$, il suffit de prendre $A = C = \{1\}$ et $B = \{1; 2\}$.

Exercice 5 - Différence symétrique

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . On appelle {différence symétrique} de A et B , notée $A \Delta B$, le sous-ensemble de E : $A \Delta B = \{x \in A \cup B; x \notin A \cap B\}$

1) Interpréter les éléments de $A \Delta B$.

2) Montrer que $A \Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$ ($C_E A$ désigne le complémentaire de A dans E).

3) Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $A \Delta C_E A$

4) Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E , on a : $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Indication

Raisonner par double inclusion.

Utiliser par exemple l'écriture précédente.

Raisonner par double inclusion.

Corrigé

Les éléments de $A \Delta B$ sont les éléments qui appartiennent à A ou à B , mais qui n'appartiennent pas simultanément aux deux (dans un langage informatique, on pourrait parler de "ou exclusif").

Soit $x \in A \Delta B$.

Par symétrie du problème, on peut toujours supposer que $x \in A$. Nécessairement, $x \notin B$.

On en déduit que $x \in A$ et $x \in C_E B$. Ceci donne $x \in A \cap C_E B$.

Réciproquement, si par exemple $x \in A \cap C_E B$, $x \in A$ et $x \notin B$, et donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$.

L'autre possibilité se traite exactement de la même façon.

En utilisant ou la définition (c'est plus clair avec l'interprétation de la première question), ou le résultat précédent, on a :

$$A \Delta A = \emptyset.$$

$$A \Delta \emptyset = A.$$

$$A \Delta E = C_E A.$$

$$A \Delta C_E A = E.$$

Comme toujours, on raisonne par double inclusion.

Si $x \in (A \Delta B) \cap C$, alors $x \in A \Delta B$ et $x \in C$.

Si on a $x \in A$, alors $x \notin B$, et $x \in C$, ce qui donne encore : $x \in A \cap C$ et $x \notin B \cap C$.

On a bien $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Le cas où $x \in B$ se traite exactement de la même façon (par symétrie).

Réciproquement, si $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$, supposons par exemple que $x \in (A \cap C)$.

Alors $x \notin B \cap C$, ce qui implique $x \notin B$ ou $x \notin C$. Mais, $x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in A$ et $x \in C$. On en déduit que $x \notin B$. D'où $x \in A \Delta B$, et $x \in C$, ce qui est le résultat que nous voulions prouver.

L'autre cas se traite également par symétrie.

Exercice 6 - Retour sur la différence symétrique

Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E . On rappelle que la {différence symétrique} de A et B est définie par : $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

où $\bar{A}$ (resp. $\bar{B}$) désigne le complémentaire de A (resp. de B) dans E .

Démontrer que $A \Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

Indication

Pour la réciproque, prouver séparément que $A \cap B = \emptyset$ et que $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Corrigé

Il y a d'abord un sens qui est facile : si $A = \emptyset$, alors par définition de la différence symétrique, on a bien $A \Delta B = B$ car $A = \emptyset$ et $\bar{A} \cap B = B$. Réciproquement, si $A \Delta B = B$, il faut prouver que $A = \emptyset$. On va découper la preuve en deux parties :

on prouve que $A \cap B = \emptyset$. En effet, prenons $x \in B$. Alors, en particulier $x \in A \Delta B$, et

donc $x \in A \cap \bar{B}$ ou $x \in \bar{A} \cap B$. La première éventualité est impossible (car $x \in B$) et donc on a $x \in \bar{A} \cap B$. Ainsi, tout élément de B est aussi dans $\bar{A}$, et donc $A \cap B = \emptyset$.

on va aussi prouver que $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

En effet, imaginons qu'on puisse trouver un élément dans $A \cap \bar{B}$. Alors cet élément serait aussi dans $A \cap B = B$, ce qui est impossible puisqu'il serait simultanément dans B et dans $\bar{B}$.

La confrontation des deux propriétés précédentes entraîne alors que $A = \emptyset$.

Exercice 7 - Équations et ensembles

Soit E un ensemble et soit $A, B \in P(E)$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in P(E)$:

1) $A \cup X = B$;

2) $A \cap X = B$.

Indication

Il faut d'abord réfléchir à quelle(s) condition(s) sur A et sur B une solution peut exister.

Corrigé

Traisons d'abord la première équation.

Puisque $A \subset A \cup X$, une telle équation ne peut avoir une solution que si $A \subset B$.

Supposons donc cette condition remplie, et déterminons toutes les solutions. Supposons d'abord que X est une solution.

Puisque $X \subset A \cup X$, on a nécessairement $X \subset B$.

De plus, X doit nécessairement contenir tous les éléments de B qui ne sont pas dans A .

Autrement dit, on a $B \setminus A \subset X \subset B$.

Réciproquement, soit X une partie de $P(E)$ telle que $B \setminus A \subset X \subset B$.

Alors $A \cup X \subset B \cup B = B$. De plus, $B = A \cup (B \setminus A) \subset A \cup X$,

et donc $A \cup X = B$. Donc toutes les solutions sont les parties X telles que $B \setminus A \subset X \subset B$.

La deuxième équation se traite de façon similaire. Elle peut aussi se ramener à la première équation en prenant le complémentaire. On trouve qu'il existe des solutions si et seulement

si $B \subset A$ et que, dans ce cas, toutes les solutions sont les parties X telles que $B \subset X \subset (B \cup \bar{A})$.

Exercice 8 - Fonction caractéristique

Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle fonction caractéristique

de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$ telle que :
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E , f et g leurs fonctions caractéristiques.

Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1) $1 - f$;

2) fg ;

3) $f + g - fg$.

Indication

On retrouve les trois opérations classiques sur les ensembles.

Corrigé

$h = 1 - f$ est la fonction caractéristique du complémentaire de A , $\bar{A}$.

En effet, on a : $h(x) = 0$ si $f(x) = 1$, c'est-à-dire si $x \in A$, c'est-à-dire si $x \notin \bar{A}$, et $h(x) = 1$ si $f(x) = 0$, c'est-à-dire si $x \notin A$, c'est-à-dire si $x \in \bar{A}$.

$h = fg$ est la fonction caractéristique de $A \cap B$. En effet, si $x \in A \cap B$, alors $f(x) = g(x) = 1$, et donc $h(x) = 1$. Si $x \notin A \cap B$, alors ou bien $x \notin A$ et $f(x) = 0$ ou bien $x \notin B$ et $g(x) = 0$.

Dans tous les cas, $h(x) = 0$.

$h = f + g - fg$ est la fonction caractéristique de $A \cup B$.

En effet, si $x \notin A \cup B$, alors $f(x) = g(x) = 0$, et donc $h(x) = 0$.

Si $x \in A \cup B$, alors on peut distinguer trois cas :

$x \in A$ et $x \in B$: on a alors $f(x) = g(x) = 1$, et $h(x) = 1 + 1 - 1 = 1$;

$x \in A$ et $x \notin B$: on a alors $f(x) = 1$ et $g(x) = 0$, soit $h(x) = 1 + 0 - 0 = 1$;

$x \notin A$ et $x \in B$: on a alors $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$, soit $h(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

WWW.GUESSMATHS.CO