Examen nationale 2013 Session Normale

2éme Bac SM A et B

Exercice 1: (3.5 Pts)

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

1- On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$; $x*y=x+y-2$

0,5 a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0,25 b) Montrer que $(\mathbb{Z},*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0,5 c) En déduire que $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.

2- On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne T définie par :

$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$; $xTy=xy-2x-2y+6$

et on considère l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $f:\begin{array}{l}(\mathbb{Z},\times)\to(\mathbb{Z},T)\\ x\mapsto x+2\end{array}$

0,5 a) Montrer que: l'application f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},\times)$ dans $(\mathbb{Z},T)$

0,25 b) Montrer que: $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right)$; $(x*y)Tz=(xTz)*(yTz)$

0,75 3- En déduire de tout ce qui précède que: $(\mathbb{Z},*,T)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,25 4- a) Montrer que: $xTy=2$ si est seulement si ($x=2$ ou $y=2$)

0,25 b) En déduire que: l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est intègre.

0,25 c) $(\mathbb{Z},*,T)$ est-il un corps ? (justifier votre réponse)

Exercice 2: (3.5 Pts)

I- Soit a un nombre complexe non nul.

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$(E):2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$

0,25 1-Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est: $\left(-1+\sqrt{3}\right)^2a^2$

0,5 2-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

II- Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, B et M d'affixes respectifs a , $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et z

Soit r la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

On pose $A_1=r^{-1}(A)$ et $B_1=r(B)$

(r^{-1} désigne la rotation réciproque de r)
et soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1

0,5 1-Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

0,5 2-a) Montrer que : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et

$$b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

0,5 b) Montrer que: le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.

3- On suppose que: $M\neq A$ et $M\neq B$

0,5 a) Montrer que: $\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}$

0,75 b) Montrer que: M, A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si M, O, A et B sont cocycliques.

Exercice 3: (3 Pts)

L'objectif de l'exercice est de chercher les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante : $(\mathcal{R}): 3^n-2^n\equiv 0[n]$

1-On suppose que n vérifie la propriété $(\mathcal{R})$ et soit p le plus petit diviseur premier positif de n.

0,75 a) Montrer que : $3^n-2^n\equiv 0[p]$, en déduire que $p\geq 5$

0,5 b) Montrer que: $2^{p-1}\equiv 1[p]$ et $3^{p-1}\equiv 1[p]$

0,5 c) Montrer qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an-b(p-1)=1$

0,5 d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$ ($a=q(p-1)+r$ avec $0\leq r<p-1$ et $q\in\mathbb{Z}$)
Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que : $rn=1+k(p-1)$

0,75 2- En déduire de tout ce qui précède: qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant $(\mathcal{R})$

Exercice 4: (10 Pts)

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x} & ;(\forall x>1) \\ h(1)=1 \end{cases}$$

Partie I

0,25 1-a) Montrer que la fonction h est continue à droite en 1

0,75 b) Montrer que $(\forall x>1): \ln x < x-1$, en déduire que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$

0,5 2- a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$; puis dresser le tableau de variations de h.

0,25 b) En déduire que $(\forall x\geq 1): 0<h(x)\leq 1$

Partie II

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt & ;(\forall x>1) \\ g(1)=\ln 2 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0,25 1- a) Vérifier que $(\forall x>1)$ $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$

0,25 b) Vérifier que $(\forall x>1)$ $g(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$

0,5 c) Montrer que $(\forall x>1)$ $g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$

0,5 2- a)Montrer que $(\forall x>1): (x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq (x-\sqrt{x})\,h(\sqrt{x})$

0,5 b) En déduire que : la fonction g est dérivable à droite au point 1

0,75 c) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et que : $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$

0,75 3- a) Montrer que: g est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et que : $(\forall x>1)$

$$g'(x)=\frac{1}{2}h(\sqrt{x})$$

0,5 b) En déduire que $(\forall x>1): 0<g'(x)\leq\frac{1}{2}$, puis donner le tableau de variations de g

0,5 c) Construire la courbe (C)

Partie III

0,5 I-1-Montrer que la fonction $k: x\mapsto g(x)-x+1$ est une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ dans l'intervalle $]-\infty,\ln 2]$

0,25 2- En déduire qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1,+\infty[$ qui vérifie $1+g(\alpha)=\alpha$

II- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par: $\begin{cases} 1 \leq u_0 < \alpha \\ u_{n+1} = 1 + g(u_n) \; ; (\forall n \geq 0) \end{cases}$

0,5 1- a) Montrer que: $(\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$

0,5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0,75 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

0,5 2- a) Montrer que : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,5 b) Montrer que : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0,25 c) En déduire une deuxième fois, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com WhatsApp : 0717467136