

Exercice n°1.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue à droite en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$$

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$; $\ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$

b. Par une étude analogue, montrer que si $x \geq 0$, alors ; $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

c. Établir que pour tout $x > 0$ on a : $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

Étudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$ sur $[0; +\infty[$

b. Montrer que sur $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$.

d. On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé.

Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0.

Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C .

Exercice n°2.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2 + 4)$.

PARTIE A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Montrer que sur l'intervalle $[2; 3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α .

Donner un encadrement de α à 10^{-1} .

c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

La courbe C représentative de la fonction f et la droite (Δ) d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de u_0 en utilisant la courbe C et la droite (Δ) , on a placé u_1 sur l'axe des abscisses.

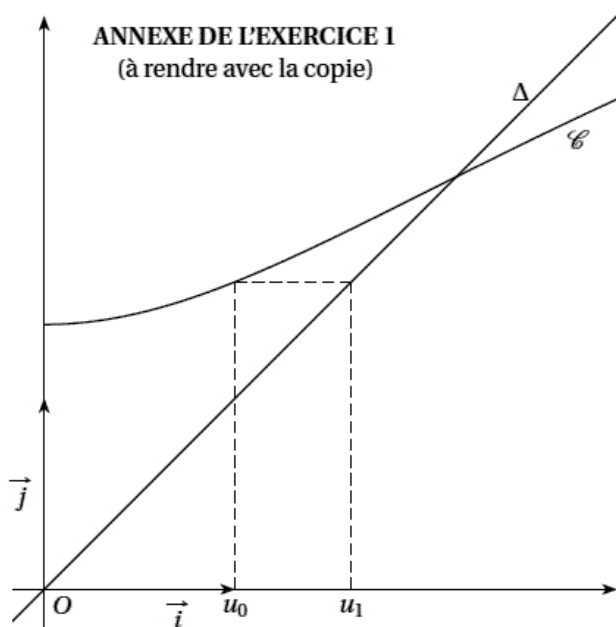
De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

2. Placer le point i de la courbe C qui a pour abscisse a .

3. a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $1 \leq u_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (u_n) converge.

c) Déterminer sa limite.



Exercice n°3

Posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}$

2) a) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < u_n$.

b) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3) on considère la suite (v_n) tel que : $v_n = u_{n-1} - \ln(n)$ et on pose pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

a) Dresser le tableau de variation de f et de g .

b) Déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; 0 < f(k) < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

c) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; v_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ puis déduire que (v_n) est croissante.

d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 1 - \ln 2 < v_n < 1 - \frac{1}{n}$; puis déduire que (v_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.