RESUME COURS INTEGRALES

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ la

différence $F(b) - F(a)$ noté $\int_a^b f(x) dx$.

Et on a : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarques :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

"dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a, b et c trois réels de I .

a) $\int_a^a f(x) dx = 0$

b) $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

c) $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Linéarité

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels de I .

*Pour tous réels α et β

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

3) L'intégrale et l'ordre

Propriétés : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

b) Si, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Théorème de la moyenne et valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$

$$(\exists c \in [a, b]) : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

RESUME COURS INTEGRALES

Intégration par parties :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et f' et g' sont continues sur I ; a et b deux réels de I . On a :

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Intégration par changement de variable :

Soit f une fonction continue dérivable sur un intervalle I , et soit g une fonction dérivable sur un intervalle J tels que $g(J) \subset I$; a et b deux réels de J .

$$\text{On a : } \int_a^b g'(x)f(g(x)) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Pratiquement, on pose $t = g(x)$ alors $dt = g'(x) dx$

$$x = a \Rightarrow t = g(a) \text{ et } x = b \Rightarrow t = g(b)$$

Calculs des surfaces et volumes :

Théorème 1 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . (C) et (C') ses courbes

représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. a et b deux réels de I tels que $a < b$.

L'aire de la partie du plan délimité par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ u.a où u.a} = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \text{ cm}^2$$

Théorème 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . (C) sa courbe représentative dans un repère

Orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. a et b deux réels de I tels que $a < b$.

*Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses un tour complet sur $[a, b]$ est :

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx \text{ u.v où u.v} = \|\vec{i}\|^3 \text{ cm}^3$$

*Si est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C) autour de

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a ; b]$

l'axe des ordonnées un tour complet sur $[a, b]$ est : $V = \left| \int_{f(a)}^{f(b)} \pi (f^{-1}(x))^2 dx \right| u.v$

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitives de f	Intervalle d'existence
a	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{Z}^{-*}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
x^r avec $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[/ k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$u'u^r$ avec $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + c$	Intervalle où u est dérivable et strictement positive
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	Intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	Intervalle où u est dérivable et strictement positive
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + c$	Intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$u'e^u$	$e^u + c$	Intervalle où u est dérivable

Applications :

Partie I :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } (\forall x \in]0; +\infty[) ; f(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I .

2) a) Soit x de I , montrer que : $(\forall t \in [0; x]) ; \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

b) Montrer que : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$

c) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

3) a) Sachant que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) Étudier les variations de f sur l'intervalle I .

CORRECTION

1) Montrons que la fonction f est continue sur l'intervalle I .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} \\ &= \arctan'(0) \\ &= \frac{1}{1+0^2} = 1 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, alors f est continue à droite en 0.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \arctan x$ sont continues sur $]0; +\infty[$.

Donc f est continue sur $]0; +\infty[$

Alors f est continue sur l'intervalle I .

2) a) Soit x de I , et soit $t \in [0; x]$. Montrer que : $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

On a : $0 \leq t \leq x$ alors $0 \leq t^2 \leq x^2$ et $1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2$

Donc : $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

b) Montrer que : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$

Soit $x \in [0; +\infty[$, alors $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ (d'après (2-a))

Et on a $0 \leq x$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0; x]$

$$\text{Alors } \frac{1}{1+x^2} \int_0^x 1 dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt$$

Donc $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$

D'où $(\forall x \in [0; +\infty[) ; \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$