EXAMEN BLNC N° 3 *2éme Bac PC- SVT*

Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) *définie par :* $u_0 = 4$ *et* $u_{n+1} = \frac{6u_n - 9}{u_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

1. a. *Vérifier que* $u_{n+1} - 3 = 3 \times \frac{u_n - 3}{u_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

   b. *Montrer par récurrence que pour tout n de* $\mathbb{N}$ *on a:* $3 < u_n$.

2. *On considère la suite numérique* (v_n) *définie par* $v_n = \frac{6}{3 - u_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$.

   a. *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite arithmétique de raison* $r = -2$.

   b. *En déduire que pour tout n de* $\mathbb{N}$ *on a:* $v_n = -6 - 2n$

   c. *Montrer que* $u_n = 3 - \frac{6}{v_n}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ *et déterminer le terme général de* (u_n)

   d. *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

Exercice 2

Dans l 'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *, on considère les points suivants* $A(1;1;2)$; $B(-1;1;-2)$; $C(2;-1;-3)$ *et* $D(-3;-6;4)$.*Soit* (S) *la sphère de centre C et passant par A .*

1. a. *Montrer que:* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2(4\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k})$

   b. *Montrer que la droite* (AD) *est perpendiculaire au plan* (ABC).

   c. *Montrer que :* $4x + 7y - z - 7 = 0$ *est une équation cartésienne du plan* (ABC).

2. a. *Montrer que:* $AC = \sqrt{30}$

   b. *Ecrire une équation cartésienne de la sphère* (S)

   c. *Montrer que la droite* (AD) *est tangente à la sphère* (S) *en un point dont on déterminera. les coordonnées*

3. *Soit* (P) *le plan d'équation :* $x + 4z + 9 = 0$

   a. *Montrer que les deux plans* (ABC) *et* (P) *sont perpendiculaires.*

   b. *Montrer que le plan* (P) *coupe la sphère* (S) *selon un cercle, dont on déterminera son rayon et son centre.*

Exercice 3

On considère les nombres complexes suivants $a = 1 + i$; $b = 2 + (\sqrt{3} + 1)i$; $c = (\sqrt{3} + 1) + 2i$; $u = 3 + i$ *et* $v = -3 + i$.

1. a. *Montrer que:* $b - a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ *et* $c - a = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

   b. *En déduire le nombre complexe* $\frac{b-a}{c-a}$ *sous forme trigonométrique.*

2. *Montrer que* u *et* $-v$ *sont les solutions de l'équation* $z^2 - 6z + 10 = 0$ *dans l'ensemble* $\mathbb{C}$.

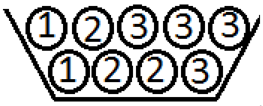
3. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct les points A ; B ; C ; D et E d'affixes respectives a ; b ; c ; u et v.

a. Montrer que les points A ; D et E sont alignes.

b. Montrer que le point C est l'image du point B par une rotation de centre A et d'angle qu'on déterminera

c. Déterminer l'angle de la rotation de centre A et qui transforme D en C.

Exercice 4



Une urne contient 9 balles : 2 balles portent le chiffre 1
3 balles portent le chiffre 2, et 4 balles portent le chiffre 3
(Ces balles sont indiscernables au toucher). On tire au hasard dans l'urne 3 balles successivement et sans remise.

1. Soit A l'évènement: « les 3 balles tirées dans l'urne portent le même chiffre »

Montrer que : $P(A)=\frac{5}{84}$

2. Soit X la variable aléatoire qui associe tout tirage à la somme des chiffres que portent les balles tirées dans l'urne.

a. Montrer que ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{4;5;6;7;8;9\}$.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-x$.

1. a. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}=+\infty$ (On rappelle que: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$)

b. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

2. a. Montrer que g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

b. Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet une seule solution dans $]-\infty;+\infty[$ que l'on déterminera.

c. Montrer que: $(\forall x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[)$; $g(x)>1$.

4. Montrer que : $\int_0^{\ln 5} g(x)\,dx=4-\frac{1}{2}(\ln 5)^2$ et en déduire que : $\frac{2}{3}\sqrt{6}<\ln 5$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{2x}-xe^x+x^2+1}{e^x-x}$.

1. a. Montrer que : $(\forall x\in]-\infty;+\infty[)$; $f(x)=g(x)+\frac{1}{g(x)}$

b. Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

c. Montrer que $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$; puis interpréter géométriquement le résultat.

2. a. Montrer que : $(\forall x\in]-\infty;+\infty[)$; $f'(x)=\frac{(e^x-1)(g(x)+1)(g(x)-1)}{(g(x))^2}$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]-\infty;+\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un réel unique α tel que: $f(\alpha)=e$ et que $\alpha\in]1;2[$.

3. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a. Etudier les branches infinies de la courbe (C)

b. *Tracer la courbe* (C)

c. *Soit S la surface (en* cm^2 *) de la partie du plan délimitée par la courbe* (C) *; l'axe des ordonnées et les droite d'équations* $x=0$ *et* $x=\ln 5$.

d. *Montrer que:* $\dfrac{\ln 5}{5-\ln 5}-\dfrac{1}{2}(\ln 5)^2 \leq \int_0^{\ln 5} f(x)\,dx-4 \leq \ln 5-\dfrac{1}{2}(\ln 5)^2$.