Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=x-\ln(x+1)$.

On a représenté ci-dessous la fonction f à l'aide d'une calculatrice.

1) Conjecturer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2) a) Étudier la limite de f en -1 .En donner une conséquence graphique.

b) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Dresser le tableau de variation complet de f.

4) Démontrer la conjecture établie au 1).

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0;5]$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln(x^2+1)$.

La courbe de f a été tracée à l'aide d'une calculatrice.

1) Conjecturer :

a) le sens de variation de f ;

b) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Pour tout réel $x\in[0;5]$, calculer $f'(x)$.

3) Dresser le tableau de variation de f. ²

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions sur $[0;5]$.

b) Donner un encadrement de la solution non entière α d'amplitude 10^{-2} .

c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-4;4[$ par : $f(x)=\ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Pour tout réel $x\in]-4;4[$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$.

En déduire que C possède un élément de symétrie.

2) Étude de f sur $[0;4[$.

a) Déterminer la limite de f en 4. En donner une conséquence graphique

b) Calculer f'(x) et étudier son signe sur $[0;4[$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $[0;4[$.

d) Déterminer une équation de la tangente à C en 0.

e) Calculer l'abscisse du point A de C d'ordonnée 1.

En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

3) Tracer précisément la courbe C en utilisant les résultats obtenus précédemment.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left]-1;\frac{1}{2}\right[$ *par :* $f(x)=\ln\left(-2x^2-x+1\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1) Résoudre l'inéquation $f(x)>0$ *.Vérifier graphiquement le résultat.*

2) a) La courbe C semble-t-elle admettre une tangente horizontale? Si oui, en quel point?

b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 5

PARTIE A :

Étude d'une fonction On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x-\ln x$.

1) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) En déduire que pour tout $x>1$, $f(x)>1$.

PARTIE B :

Étude d'une suite récurrente Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_0=5$ *et pour tout entier naturel n,* $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n>1$.

2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

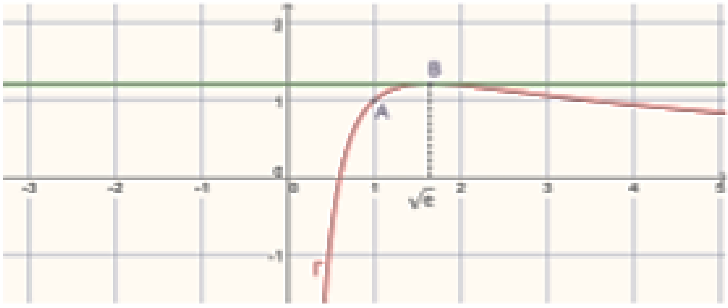
3) En déduire que la suite (u_n) *converge et calculer sa limite.*

Exercice 6

La courbe Γ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *par:* $f(x)=a\ln x+bx$

où a et b sont des réels.

- *Le point* $A(1;1)$ *appartient à Γ.*
- *La tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse* $\sqrt{e}$ *est parallèle à l'axe des abscisses.*



1) Lire graphiquement $f(1)$ *et* $f'\left(\sqrt{e}\right)$.

2) En déduire les valeurs de a et b.

3) Étudier le sens de variation de la fonction f.

4) Montrer que la tangente à la courbe Γ au point A passe par l'origine du repère.

Exercice 7

PARTIE A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $u(x)=\ln(x)+x-3$.

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3 .

3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2$.

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f à droite en 0 .

2) a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE C

Soit (C') la courbe d'équation $y=\ln(x)$.

1) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)-\ln(x)=\frac{2-\ln(x)}{x}$.

2) En déduire que les courbes (C) et (C') ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 8

PARTIE A : Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+4\ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.

2) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

3) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

PARTIE B : Une valeur approchée du réel α

1) On admet que $\alpha\in[0,1;1]$ .Par la méthode de la dichotomie donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .

PARTIE C : Un problème de distance

On appelle C la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x)=2\ln x$.

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe C, il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1) Soit M un point de la courbe C et x son abscisse.
Exprimer OM en fonction de x.

2) a) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x^2+4(\ln x)^2$.
Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.

b) En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe C tel que pour tout point M de C, distinct de A, on ait $OM>OA$.

3) Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à T_A la tangente à la courbe C au point A.