EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

1) *a) Montrer que f est dérivable sur* $]2;+\infty[$ *et que pour tout* $x\in]2;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{-8}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}$

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Tracer (C_f) *la courbe de f dans un repère orthonormé.*

2) *a) Montrer que f réalise une bijection de* $x\in]2;+\infty[$ *, sur lui-même.*

   b) Expliciter $f\circ f(x)$ *pour* $x>2$ *. En déduire que la droite* Δ *:* $y=x$ *est un axe de symétrie pour* (C_f).

3) *Soit g la fonction définie sur* $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ *, par :* $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{4} & si\ x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{5}{4} & si\ x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

   a) Montrer que g est continue à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$.

   b) Montrer que g est dérivable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ *, et que :* $g'(x)=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ *pour tout* $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

4) *a) Montrer que* $\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$ *, on a :* $|g'(x)|\leq\dfrac{2}{3}$.

   b) Montrer que l'équation $g(x)=x$ *admet dans* $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$ *, une solution unique* α .

5) *Soit* (U_n) *la suite réelle définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases}U_0=\dfrac{\pi}{3}\\ U_{n+1}=g(U_n) & (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

   a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}:\ \dfrac{\pi}{3}\leq U_n\leq\dfrac{\pi}{2}$.

   b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ □: $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$ *et en déduire que* $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ |U_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

   c) Montrer que (U_n) *est convergente et donner sa limite.*

6) *On pose pour tout* $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $h(x)=\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{2}g(x)$.

   a) Vérifier que $h(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sin x}$

   b) Dresser le tableau de variation de h

   c) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ *, sur un intervalle que l'on précisera.*

7) *Soit la suite* (V_n) *définie par* $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $V_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h^{-1}\left(\dfrac{-k}{n^2}\right)$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $h^{-1}\left(\frac{-1}{n}\right)\le V_n\le h^{-1}\left(\frac{-1}{n^2}\right)$.

b) En déduire que (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 2: (6points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;\ 1]$ par : $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+1$

1) Montrer que l'équation $f(x)=4x$ admet dans $]-\infty;\ 1]$ une solution unique α.

Vérifier que $0<\alpha<1$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0=\frac{\alpha}{2}$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=\frac{1}{4}f(U_n)$.

a) Monter que pour tout entier n ; $0<U_n<1$.

b) Montrer que $\forall x\in[0,1]$ on a : $|f'(x)|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Montrer que $\forall n\in$ IN ; $|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{\sqrt{2}}{8}|U_n-\alpha|$.

d) Déduire que $\forall n\in$ IN ; $|U_n-\alpha|\le\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^n$,puis que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit g la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$g(x)=f\left(1+\frac{1}{\tan x}\right)$

a) Montrer que : $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=1+\frac{1}{\sin x}$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[2\ ;+\infty[$

c) Montrer que g-1 est dérivable sur $]2\ ;+\infty[$ [et que pour tout $x\in]2\ ;+\infty[$ on a ;

$(g^{-1})'(x)=\frac{-1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$

EXERCICE 3:

Soit n un entier naturel non nul, f_n la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f_n(x)=x+n-n\tan(x)$

1/ a) Etudier les variations de f_n sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

b) En déduire que l'équation, $f_n(x)=0$ admet une seule solution α_n dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

c) Vérifier que $\alpha_n\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ et que : $\tan(\alpha_n)=1+\frac{\alpha_n}{n}$.

2/ On définit la suite (α_n) pour $n\in IN^*$

a) Montrer que pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout n on a $f_{n+1}(x)<f_n(x)$

b) Déduire alors que la suite (α_n) est décroissante *c) Prouver que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite.*

EXERCICE 4:

Dans le même repère Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ *par* $f(x)=-1+\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)}$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1;1[$ *sur IR*

b) Montrer que f^{-1} *est dérivable sur IR et que :* $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{2}{\pi\left((x+1)^2+1\right)}$

2) Soit F la fonction définie sur IR^* *par :* $F(x)=f^{-1}(x-1)+f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

a) Montrer que F est dérivable sur IR^* *et calculer* $F'(x)$

b) En déduire que pour tout $x\in IR_+^*$, $F(x)=-1$ *et pour tout* $x\in IR_-^*$; $F(x)=1$

3) Pour tout $n\in IN^*$ *on pose :* $u_n=\sum_{k=1}^{n}\left(f^{-1}\left(\dfrac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(\dfrac{-1}{k}\right)\right)$

a) Montrer que $f^{-1}\left(\dfrac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(\dfrac{-1}{k+1}\right)=-1$

b) Montrer que : $u_n=-n-f^{-1}\left(\dfrac{-1}{n+1}\right)$ *puis calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

EXERCICE 5:

1°/ Soit la fonction définie sur IR_+ *par :* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

a) Montrer que f est dérivable sur IR_+ .

b) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leq\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\leq x$.

c) Montrer que la fonction u définie sur $[0;1]$ *par :* $u(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$ *réalise une bijection de* $[0;1]$ *sur* $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ *et expliciter* $u^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

2°/ Soit g la fonction définie sur IR_+ *par* $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ *et* (C_g) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé .*

a) Interpréter graphiquement la double inégalité démontrée en 1°/b).

b) Montrer que g réalise une bijection de IR_+ *sur* IR_+ . *On note* g^{-1} *la fonction réciproque de g .*

c) Tracer dans le même repère les courbes (C_g) , $(C_{g^{-1}})$, (C_u) *et* $(C_{u^{-1}})$.

3°/ Soit (U_n) *la suite définie sur IN par* $U_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *et*

$U_{n+1}=g^{-1}(U_n)$ $(\forall n\geq 0)$.

a) Montrer la suite (U_n) *que est croissante.*

b) Montrer que la suite (U_n) *est non majorée.*

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4°/ a) En utilisant la question 2°/c), justifier que pour tout

$x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$; $x \le g^{-1}(x) \le 1-\sqrt{1-2x}$

b) En déduire la limite de la suite (V_n) *définie par :*

$V_n = ng^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.