Série n°15 « géométrie dans l'espace » **2éme Bac PC-SVT**

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère le point $A(1;-1;3)$ et le plan (P) d'équation cartésienne $x-y+3z=0$

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (OA).

2) Soit (Q) le plan perpendiculaire à la droite (OA) en A ;

   a) Déterminer une équation cortésienne du plan (Q)

   b) Montrer que (P) et (Q) sont parallèles

3) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(a;b;c)$; où a; b et c sont des réels.

On suppose que (P) coupe la sphère (S) selon un cercle de contre O et de rayon $r=\sqrt{33}$ et que (Q) est tangent à (S) en A.

   a) Montrer que $\Omega\in(OA)$ et déduire $b=-a$ et $c=3a$.

   b) Montrer que $\Omega A^2-\Omega O^2 = 33$, déduire que : $a-b+3c=-11$.

   c) Dédire les coordonnées de $\Omega\in(OA)$.

Exercice 2

On donne deux droites dd et d'd' de l'espace par des systèmes d'équations paramétriques dans un repère orthonormé

$$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-3-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d':\begin{cases} x=2t \\ y=-4+t \\ z=2+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

1) d et d' sont-elles parallèles?
2) Déterminer les équations du plan P contenant d et parallèle à d', et du plan P' contenant d' et parallèle à d. En déduire que d et d' ne sont pas concourantes.
3) Déterminer une équation du plan P'' passant par l'origine et orthogonal à d, puis en déduire les coordonnées du point M intersection de P'' et de d.
4) Montrer sans calculs que P'' et P' ont une intersection non-vide.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les trois points $A(-1;1;2)$; $B(0;0;1)$ et $C(0;-1;-2)$.

1) Vérifier que les points A ; B et C ne sont pas alignés.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3) Soit M le point de coordonnées $(8;10;5)$.
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par M et orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées du point H, point d'intersection de d et de (ABC).

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$ et $C(0;0;c)$ où a ; b et c trois réels non nuls,.

1) Donner l'équation de la sphère (S) passant par O ; A ; B et C.
2) Donner l'équation du plan P passant par A ; B et C.
3) En déduire le rayon du cercle (Γ) passant les points A ; B et C.

Exercice 5

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(0;4;1)$; $B(1;3;0)$; $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$.

1. Démontrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.

   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Soit P_1 le plan d'équation $x+y+z=0$ et P_2 le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases} \quad / t\in R$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?

Exercice 6

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; on considère les point $A(1;1;1)$; $B(0;1;2)$ et $C(-3;2;5)$ et le plan (P) d'équation $x-y-z+2=0$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-\vec{k}$

b) Déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Montrer que : $(P)\perp(ABC)$.

d) Donner une représentation paramétrique de la droite (Γ) l'intersection de (P) et (ABC).

2) Soit (Δ) la droite passant par le point A et perpendiculaire à (P).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Déterminer l'intersection de la droite (Δ) et le plan (P).

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant: $x^2+y^2+z^2-2y-2z+1=0$

a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(0;1;1)$ et de rayon $R=1$.

b) Calculer la distance du point Ω au plan (P).

c) Déterminer l'intersection de la sphère (S) et le plan (P).

4) Soit la droite (D) définie par: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1-y}{3}=\dfrac{z-1}{5}$

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (D)

b) Montrer que $(D)\perp(\Delta)$.

c) Étudier la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S) et déterminer leur intersection.

Exercice 7

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1) Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2) Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2). Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

3) Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\,;-4\,;-1)$.

a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b. Exprimer AM^2 en fonction de t.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=2t^2-2t+3$.

• Étudier les variations de f.

• Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?

Dans la suite, on désignera ce point par I.

• Préciser les coordonnées du point I.

4) Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a. Déterminer une équation cartésienne de (Q) .

b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

Exercice 8 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On donne les points $A(2;1;-1)$; $B(0;2;1)$ et $C(1;2;-1)$.

1) a) Montrer que A, B et C déterminent un plan.

b) Montrer qu'une équation du plan (ABC) est $2x+2y+z-5=0$.

2) Soit la droite : $(\Delta):\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=-4-\frac{1}{2}\alpha \end{cases} \quad \alpha\in\mathbb{R}$

a) Montrer que (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection E.

b) Vérifier que ABCD est un parallélogramme puis calculer son aire.

Exercice 9 :

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé on donne les points $A(0;1;0)$,
Les vecteurs $\vec{u}(2;-1;0)$; $\vec{v}(1;2;-2)$ et les droites D qui passe par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ et D' qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{v}$.

1) Déterminer une représentation paramétrique pour chacune des droites D et D'.

2) Soit E un point de D' d'abscisse -1 .

a) Déterminer les coordonnées de E.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite D' en E.

c) Calculer la distance du point A au plan P.

3) Soit F un point de D d'abscisse m. (m un paramètre réel)

a) Déterminer les coordonnées de F en fonction de m.

b) déterminer une équation cartésienne du plan Q_m perpendiculaire à la droite D en F.

c) calculer la distance du point A au plan Q_m en fonction de m.

4) a) montrer que P et Q_m sont perpendiculaires.

b) déterminer la distance du point A à la droite d'intersection de P et Q_m en fonction de m.

Exercice 10 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

n considère les points $A(1;1;-1)$; $B(2;0;1)$; $C(3;1;1)$ et la sphère (S) d'équation
$x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+9=0$

1- a/ Vérifier que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

b/En déduire $d\left(C;(AB)\right)$ la distance du point C à la droite (AB).

c/ Calculer l'aire du triangle ABC.

2- a/ Montrer que l'équation cartésienne du plan (P) passant par le point O et parallèle au plan (ABC) est $x-y-z=0$.

Montrer que la sphère (S) a pour centre le point C et de rayon R = v2.

Montrer que la droite (AB) est tangente la sphère (S) ; puis déterminer le point de contact.

Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) dont on déterminera le rayon et le centre.

Exercice 11

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(0;2;0)$ et $B(-2;4;-2)$

Soit (P) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que : $AM = BM$

1) Montrer que (P) est le plan d'équation $x-y+z+5=0$

2) Soit (D) la droite définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$

a- Montrer que $A\in(D)$ et $(D)\perp(P)$

b- Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

Montrer que : $(-1;3;-1)$ est le triplet des coordonnées du point H.

3) Soient $C(1;4;-2)$ et $D(-1;0;2)$ deux points de l'espace et (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que : $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{DM}=0$.

a- Montrer que (S) est la sphère de centre le point A et de rayon $R=3$.

b- Montrer que l'intersection du plan (P) et la sphère (S) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.