

Exercice

I- On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par: $g(x) = 2\ln(x) - 1 + x$.

1- a- Calculer $g'(x)$; pour tout $x \in]0; +\infty[$.

b- Dédurre la monotonie de g sur $]0; +\infty[$.

2- Calculer $g(1)$, puis déduire que $\forall x \in [1; +\infty[; g(x) \geq 0$ et $\forall x \in]0; 1] ; g(x) \leq 0$.

II- On considère la fonction numérique définie sur $x \in]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) + x$.
et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- Démontrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

2- a- Démontrer que: $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

b- Dédurre les variations de f .

3- Démontrer que (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

4- a- Déterminer la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) .

b- Construire (Δ) et (C) .

Solution

I - 1- a- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; g'(x) = (2\ln(x) - 1 + x)' = \frac{2}{x} + 1$.

b- Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $g'(x) > 0$

Par suite g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2- On a: $g(1) = 2\ln(1) - 1 + 1 = 0$.

■ Comme g est croissante sur l'intervalle $]0; 1]$ alors $\forall x \leq 1 ; g(x) \leq g(1)$ d'où $g(x) \leq 0$.

■ Comme g est croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$ alors $\forall x \geq 1 ; g(x) \geq g(1)$ d'où $g(x) \geq 0$.

II- 1- ■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln(x))^2 - \ln(x) + x) = +\infty$ (Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(x)) = +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln(x))^2 - \ln(x) + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \left(\ln(x) - 1 + \frac{x}{\ln(x)} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln(x)} \right) = +\infty$)

$$\begin{aligned} 2- (\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) &= ((\ln(x))^2 - \ln(x) + x)' \\ &= 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) - \frac{1}{x} + 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{2\ln(x) - 1 + x}{x}$$

$$= \frac{g(x)}{x}$$

Donc $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

■ Comme $\forall x \leq 1 ; g(x) \leq 0$.

■ Comme $\forall x \geq 1 ; g(x) \geq 0$.

Alors : - ■ $\forall x \leq 1 ; f'(x) \leq 0$.

■ $\forall x \geq 1 ; f'(x) \geq 0$.

Donc : f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$

Tableau de variation de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln(x))^2 - \ln(x) + x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln(x))^2}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln(\sqrt{x^2}))^2}{\sqrt{x^2}} - \frac{\ln(x)}{x} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 - \frac{\ln(x)}{x} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 - \frac{\ln(x)}{x} + 1 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(Car \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = 0)$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

4- a- On a: $f(x) - x = \ln(x)(\ln(x) - 1)$

D'où la position relative de (C) et la droite (Δ) est résumée dans le tableau suivant :

x	0	1	e	$+\infty$	
$f(x) - x$	+	0	-	0	+
<i>Position relative de (C) et la droite (Δ)</i>	(C) est Au-dessus de la droite (Δ)		(C) est Au-dessous de la droite (Δ)		(C) est Au-dessus de la droite (Δ)
	Point d'intersection		Point d'intersection		

b – Construction de (C) et la droite (Δ)

