Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=2-x+\frac{\ln x}{x}$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$*) et* $\lim_{x\to0^+} f(x)$

2. Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=1-x^2-\ln x$.

a. Etudier le sens de variation de g.

b. Calculer $g(1)$. *En déduire le signe de g.*

3. Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

4. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a. Montrer que la droite $\Delta:\ y=-x+2$ *est une asymptote à C.*

b. Etudier la position relative de C et Δ.

c. Tracer C et Δ *dans un repère orthonormé.*

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Construire, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$*, la courbe représentative de la fonction f e préciser les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe* $(O,\vec{i})$.

3. Montrer que la fonction $F:x\mapsto x(\ln x)^2-5x\ln x+7x$ *est une primitive de la fonction f sur* $]0;+\infty[$.

4. Calculer l'aire du domaine du plan limitée par la courbe de f et les droites d'équations respectives $x=e$, $x=e^{é}$ *et* $y=0$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Et soit (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$. *(unité* $1cm$*).*

1- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *puis interpréter le résultat géométriquement.*

2- a - Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$ *;* $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$.

b- En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c-Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$ *;* $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ *déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

d-Montrer que (C_f) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction asymptotique la droite* Δ *d'équation* $y=x$.

3- a - Montrer que pour tout $x\in]0;1]$ *;* $(x-1)+\ln x\le 0$*, et que pour tout* $x\in[1;+\infty[$ *;* $(x-1)+\ln x\ge 0$.

b-Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$ *;* $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$

c- Dresser le tableau de variations de la fonction f .

4-a - Montrer que : $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ *pour tout* $x\in]0;+\infty[$

b- En déduire que la courbe (C_f) *admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.*

5-a - Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$ *;* $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ *et en déduire la position relative de* (C_f) *et* (Δ)

b-Tracer la droite (Δ) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6- a-Montrer que la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction :

$h : x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$.

b- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e (\ln x)^2\,dx = e-2$.

e- Calculer en cm^2, la surface de la partie comprise entre la courbe (C_f) et la droite (Δ) et les droites d'équations : $x=1$ et $x=e$.

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

$\ln\sqrt{3}+\ln 6-\ln 9$; $\ln 8+\ln\sqrt{2}-\ln 16$; $\ln\left(\frac{35}{12}\right)+\ln\left(\frac{6}{7}\right)+\ln\left(\frac{4}{5}\right)$;

$\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)+\ln\sqrt[3]{e}$; $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2024}+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2024}$;

$\ln\sqrt{\sqrt{7}+2}+\ln\sqrt{\sqrt{7}-2}+3\ln\sqrt{3}$

Exercice 5

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f(x)=\ln(x-3)$; $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$; $f(x)=\ln\left(x^2-x+2\right)$; $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$;

$f(x)=\ln(4-x)$; $f(x)=\frac{x}{\ln x}$; $f(x)=\ln(\ln x)$; $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$

$f(x)=\frac{\ln x}{1-\ln x}$; $f(x)=\frac{\ln(2x-1)}{\ln(x+1)}$; $f(x)=\ln(1-|x|)$; $f(x)=\ln|x-2|+\ln|x-1|$

EXERCICE 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\ln(2x-1)=\ln(x+1)$; $2\ln(x-1)-1=0$; $\ln\left(x^2+3\right)=\ln(2x)$; $\ln(x+2)=2\ln(x)$;

$(\ln x)^2=\ln\left(x^4\right)$; $\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln\left(x^2-9\right)$; $2\ln^2 x+\ln x-3=0$;

$\ln|4x+1|=3\ln 5$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$2\ln x-3\geq 0$; $(\ln x-3)(1+2\ln x)\geq 0$; $\ln\left(x^2+5x+5\right)>0$; $2(\ln x)^2-\ln(x)-3\leq 0$;

EXERCICE 4

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3\ln x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2\ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x\ln x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}x(1-\ln x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln x}{\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln x)^2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^4(\ln x)^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{\ln x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\ln(-x)}{2+\ln(-x)}$

EXERCICE 5

Calculer $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f pour chaque fonction suivante :

$f(x)=x^3+1-2\ln x$; $f(x)=x\ln x$; $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; $f(x)=(\ln x)^2$; $f(x)=\sqrt{\ln x}$

; $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+\ln x}$; $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$; $f(x)=(x-1)\ln(x+2)$

$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$

EXERCICE 6

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1+x+\ln x$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

2. a. Montrer que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et que :

$\dfrac{1}{5}<\alpha<\dfrac{1}{2}$

3. Déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

II. *Soit f la fonction définie par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{4x\ln x}{1+x} & si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D_f *l'ensemble de définition de la fonction f*

2. Etudier la continuité de f à droite au point $x_0=0$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *puis étudier la branche infinie de courbe au voisinage* $+\infty$

4. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ *; puis interprété géométriquement ce résultat.*

5 .a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{4g(x)}{(x+1)^2}$ *; pour tout x de* $]0;+\infty[$

b. Déduire que f est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$ *et strictement décroissante sur* $[0;\alpha]$

c. Montrer que $f(\alpha)=-4\alpha$ *et dresser le tableau de variations de f.*

6. a. Montrer que : $f''(x)=\dfrac{4(1-x^2-2x\ln x)}{x(x+1)^3}$ *; pour tout x de* $]0;+\infty[$

b. Etudier le signe de $1-x^2$ *et* $-2x\ln x$ *sur* $]0;+\infty[$

c. Déduire que le point d'abscisse I est l'unique point d'inflexion de (C)

7. Donner l'équation de la tangente (T) *à la courbe* (C) *au point d'abscisse* 1

8. Tracer (T) *et* (C) *(on donne* $\alpha\approx0.25$*)*

9. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer*

b. Tracer la courbe (C') *la courbe de la fonction réciproque* f^{-1}

EXERCICE 7

I- *On considère la fonction numérique g définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=2x^2+1-\ln x$

1. Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

2. a. Calculer $g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction g

3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

II- On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ puis interprété géométriquement ce résultat.

2. Vérifier que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

3. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

4. a. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f

5. a. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer son point d'inflexion.

6. Tracer la courbe (C)

<u>EXERCICE 8</u>

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln x$

1. a. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Etudier les variations de la fonction g

2. En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

II- Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x\ln x & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2. Etudier la continuité de f à droite au point $x_0 = 0$

3. Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et interpréter le résultat graphiquement.

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier la branche infinie de courbe au voisinage $+\infty$

5. a. Montrer que $f'(x) = x + g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

   b. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$

6. a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une tangente à (C) au point $A(1;1)$

   b. Etudier les positions relatives de (C) et la droite (Δ)

7. a. Calculer $f''(x)$ pour tout de $]0;+\infty[$

   b. Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer son point d'inflexion.

8. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$

9. Construire (C) et $\left(C^{-1}\right)$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}

III- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que $0 \le u_n \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

<u>EXERCICE 9</u>

I- On considère les deux fonctions g et h définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln x$ et
$h(x) = x + (x-2)\ln x$

1. a. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Etudier les variations de la fonction g

2. En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

3. Montrer que $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$ pour tout x de 10:+

4. Montre que $(x-1)\ln x \geq 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

5. En déduire que $h(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

II- On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; puis interprété géométriquement ce résultat.

2. Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$; puis étudier la branche infinie de courbe au voisinage $+\infty$

3. a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Dresser le tableau de la variation de la fonction f

4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une tangente à (C) au point $A(1;1)$

5. a. Vérifier que $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b. Etudier le signe de $f(x) - x$ et déduire la position relative de (C) et la droite (D)

6. Tracer la courbe (C) et la droite (D)

(On admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse comprise entre 1 et 1.5)

7. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b. Tracer (C^{-1}) la courbe représentative de la fonction f^{-1}

III- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.