

EXERCICE

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ définie par : $g(x) = x + 1 - \ln x$

- 1- a) Déterminer $g'(x)$ et donner les variations de g .
b) Dresser le tableau de variation de g sans préciser les limites aux bornes.
- 2- a) Justifier que $g(1)$ est un minimum de g sur $]0; +\infty[$.
b) Dédire que : ■ pour tout $x \in]0; +\infty[$; $g(x) > 0$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln x$.

- 1- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2- a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b) Dresser le tableau de variations de f .
- 3- a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0; +\infty[$.
b) Prouver que $x \in]1, 9; +\infty[$
- 4- a) Déterminer l'ordonnée du point A de (C) d'abscisse 1.
b) Déterminer une équation de la tangente à (C) en A.

PARTIE C

1- Prouver que la fonction F définie par : $F(x) = x \ln x + \frac{1}{2}[(\ln x)^2 - 4x]$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2- Calculer la valeur de l'aire délimitée par (C) ; l'axe des abscisses et les droites $x = 2$ et $x = 4$.