Devoir surveillé n° 1 B-Continuité 2éme Bac SM

Exercice 1 **(6 pts)** *(les questions I, II, III et IIII sont indépendantes) (6 pts)*

I) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{x^3+3x^5}}{\sqrt{x^2+x}+x} \quad ; \quad \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{3\arctan(x)-\pi}{x-\sqrt{3}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x}\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x^3+\sqrt{x^3}}\right)$$

II) Démontrer que : $(\forall x\in\left]-1;+\infty\right[)$; $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot$

puis déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} x\left(4\arctan\left(1-\frac{1}{2x}\right)-\pi\right)$ *(A utiliser* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)=1$*)*

III) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[2023;2024]$.

Montrer $(\exists\alpha\in[2023;2024])\ /\ f(\alpha)-f(2023)=f(2024)-f(\alpha)$

IV) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\cos(\arctan(x))=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 2 **(4 pts)**

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

1) Déterminer D_f *et* D_E *(*D_E *est le domaine d'étude de la fonction f)*

2) Soit $x\in D_E$*, poser* $\alpha=\arctan(x)$.

Donner une écriture simplifiée de f

3) Soit g la restriction de f sur $I=\left]1;+\infty\right[$

a) Démontrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$.

Exercice 3 **(10 pts)**

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) & ;si\ x<0 \\ f(x)=1+\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} & ;si\ x\geq 0\end{cases}$$

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de f au point 0 *et interpréter géométriquement chaque résultat* *obtenu.*

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. *(A utiliser* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arctan(x)}{x}\right)=1$*)*

b) Démontrer que $(\Delta)\ :\ y=x+1$ *est une asymptote à* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.

c) Etudier la branche infini de (C_f) *au voisinage de* $-\infty$.

3) a) Etudier les variations de f sur $I=]-\infty;0[$.

b) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)\ ;\ f'(x)=\dfrac{x(x^2+3)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Et donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) a) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)\ ;\ f''(x)=\dfrac{3(1-x^2)}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de (C_f).

5) Construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la courbe* (C_f).

6) a) Soit g la restriction de f sur $J=[0;+\infty[$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} *et que* g^{-1} *est dérivable en* 1 *puis déterminer* $(g^{-1})'(1)$.

7) Construire dans le même repère précédent la courbe $(C_{g^{-1}})$.