Exercice1 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2+8}-3}{2x-1}$ **2)** $\lim_{x \to +\infty} \left(2x^3+x^2-x+4\right)$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}\right)$ **4)** $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}\right)$

5) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ **6)** $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$

Solutions :

1) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2+8}-3}{2x-1}$

Pour $x \neq \frac{1}{2}$ *; on a :* $\frac{\sqrt{4x^2+8}-3}{2x-1} = \frac{\left(\sqrt{4x^2+8}-3\right)\left(\sqrt{4x^2+8}+3\right)}{(2x-1)\left(\sqrt{4x^2+8}+3\right)}$

$$= \frac{4x^2+8-9}{(2x-1)\left(\sqrt{4x^2+8}+3\right)}$$

$$= \frac{\left((2x)^2-1^2\right)}{(2x-1)\left(\sqrt{4x^2+8}+3\right)}$$

$$= \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)\left(\sqrt{4x^2+8}+3\right)}$$

$$= \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+8}+3}$$

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{4x^2+8}-3}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2+8}+3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3+x^2-x+4\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3\right)=+\infty$ *(on prend la limite du plus haut degré)*

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-7x^4}{14x^3}\right)$

(quand il s'agit du quotient de deux polynômes on prend la limite de la quotient des plus hauts degrés)

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-7x}{2}\right)=-\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2x^5}{2x^6}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=0$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

Pour $x>0$ *; on a :* $\sqrt{x^2+x}-x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right)}$$

$$=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\tan x-1}{x-\dfrac{\pi}{4}}\right)$

On pose : $g(x)=\tan x$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ *; et* $g'(x)=1+\tan^2 x$

D'autre part $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$

$$=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

<u>Exercice2</u> *: (Limites à droite et à gauche)*

Soit la fonction $f : x\mapsto \dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Calculer la limite de f en $x_0=-1$

<u>Solution</u> *:*

► *Si* $-1<x<1$ *; on a :* $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

$$=\frac{(x+1)^2}{|x-1||x+1|}$$

$$=\frac{(x+1)^2}{(1-x)(x+1)}$$

$$=\frac{x+1}{1-x}$$

Donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+1}{1-x}=0$

► *Si* $x<-1$ *; on a :* $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

$$=\frac{(x+1)^2}{|x-1||x+1|}$$

$$=\frac{(x+1)^2}{(1-x)(-(x+1))}$$

$$=\frac{x+1}{x-1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x+1}{x-1}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$

Par suite $\boxed{\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0}$

Exercice 3:

Soient les fonctions tels que : $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$; $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ *et* $h(x)=\frac{x^2+1}{x^3}\sin(x)$

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1) la fonction $x\mapsto\sqrt{2x+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *; comme composée de deux fonction continues sur* $\mathbb{R}$ *et la fonction* $x\mapsto -3x^2+x$ *(fonction polynôme)*

► *Donc :* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=-10\sqrt{5}$

► $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)\right)=-\infty$

(car $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-3x^2+x\right)=-\infty$ *)*

2) ► $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}+1\right)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2$ *)*

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to 3} g(x) = -\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(-2x^2+1\right) = -17\left(\sqrt{3}+1\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2 = 0^+$ *)*

3) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+1}{x^3}\sin(x)\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\times\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

$= +\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = 1$*)*

4) $k(x) = \dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ *donc :* $D_k = \left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x(x-2)\neq 0\right\}$

$$= \left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq 0 \text{ et } x\neq 2\right\}$$

$$= \left]-\infty;0\right[\cup\left]0;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$$

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{x^2}\right)$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3}{x}\right) = 0$ *(car* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ *)*

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to 0^-} k(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}\right)$

$= +\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x(x-2)\right) = 0^+$ $\left(x<0 \Rightarrow x(x-2)>0\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-}(-3x+1) = 1$*)*

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}\right)$

$= -\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x(x-2)\right) = 0^-$ $\left(0<x<2 \Rightarrow x(x-2)<0\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-}(-3x+1) = 1$*)*

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to 2^-} k(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}\right)$

$= +\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x(x-2)\right) = 0^-$ $\left(x<2 \Rightarrow x(x-2)<0\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^-}(-3x+1) = -5$ *)*

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to 2^+} k(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}\right)$

$= -\infty$ *(car* $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x(x-2)\right) = 0^+$ $\left(x>2 \Rightarrow x(x-2)>0\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^+}(-3x+1) = -5$ *)*

▶ $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3x}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3}{x}\right) = 0$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3}{x}\right) = 0$

Exercice 4:

Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x-3} \ ; si\, x \neq 3 \\ f(3) = 7 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$

Solution :

Pour $x \neq 3$ *on a :* $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

$= \dfrac{(x-3)(x+4)}{x-3}$

$= x+4$

D'où $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3}(x+4) = 7$ *; et* $f(3) = 7$ *; alors* $\lim\limits_{x\to3} f(x) = f(3)$

Donc : f est continue en en $x_0 = 3$

Exercice 5 :

Considérons la fonction f définie Par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan(x)} \ ; si \ x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $x_0=0$

Solution :

Pour ; on a : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan(x)}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\tan(x)}$$

$$=\frac{x+1-1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\tan(x)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\times\dfrac{\tan(x)}{x}}$$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\times\dfrac{\tan(x)}{x}}\right)=\dfrac{1}{2}$ *(car* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)=1$*)*

Et $f(0)=\dfrac{1}{2}$ *; alors* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Donc : f est continue en en $x_0=0$

Exercice 6 :

Considérons la fonction f définie Par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-2x} \ ; si \ x\neq 0 \ et \ x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $x_0=2$

Solution :

Pour $x \neq 2$ *; on a :* $f(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x}$

$$= \frac{\sin(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{x}$$

Et $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ *; on pose* $t = x - 2$ *;quand* $x \to 2$ *alors* $t \to 0$

D'où $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)} \times \dfrac{1}{x} \right) = \dfrac{1}{2}$ *et* $f(2) = \dfrac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Par suite f est continue en en $x_0 = 2$