

### Exercice 1

On Considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos(\sin(2x))}{x^2} & ; \text{ si } x > 0 \\ f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} & ; \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Etudier la Continuité de  $f$  en 0.

2) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) ; 0 \leq \frac{1 - \cos(\sin(2x))}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$

b) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3) Soit  $g$  la Restriction de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I = ]-\infty; 0]$ .

a) Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera

b) Montrer que :  $(\forall x \in J) ; g^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$

4) a) Montrer que :  $\left( \exists c \in \left] -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right] ; g(c) = \sqrt{2} \right)$

b) En déduire que :  $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$

### Exercice 2

On Considère la fonction  $f$  définie par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$

0)- Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ .

2) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 - \tan^2(f(x)) = 2x \tan(f(x))$

b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{Arctan}(x)$

c) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3) a) Montrer que :  $(\exists c \in ]0; 1[) ; f(c) = c$ .

b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \arctan|x| + \arctan|x| = \frac{\pi}{2}$ .

c) En déduire :  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{c}\right) = 2c$

### Exercice 3

1) Calculer la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x} \times \sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[4]{1+x} \times \sqrt[5]{1-x} \times \dots \times \sqrt[2n]{1+x} \times \sqrt[2n+1]{1-x}}{x}$

2) En déduire la dérivabilité de la fonction  $f$  définie sur  $[0;1]$  par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \times \sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[4]{1+x} \times \sqrt[5]{1-x} \times \dots \times \sqrt[2n]{1+x} \times \sqrt[2n+1]{1-x}$$

A droite en 0

### Exercice 4

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 7 - x - 4\sqrt{3-x}$

Et  $(C_f)$  de courbe dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .

2) Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  et l'axe des abscisses, puis l'intersection avec l'axe des ordonnées.

3) a) Vérifier que :  $(\forall x \in D_f); f(x) = (\sqrt{3-x} - 2)^2$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4) a) Étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 3.

b) Interpréter géométriquement le résultat précédent

5) a) Montrer que :  $(\forall x \in D_f \setminus \{3\}); f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{3-x}(2+\sqrt{3-x})}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

6) a) Montrer que :  $(\forall x < 0); \frac{f(x)}{x} = \frac{7-x}{x} + 4\sqrt{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}}$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ; puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$

c) Déterminer la branche infinie de  $(C_f)$ .

d) Montrer que :  $(\forall x \in D_f); f(x) + x = \frac{1+16x}{7+4\sqrt{3-x}}$  ; puis déduire la position relative de  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -x$ .

7) a) Montrer que :  $(\forall x \in D_f \setminus \{3\}); f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(3-x)^3}}$

b) Déduire le concave de  $(C_f)$  sur  $D_f$ .

8) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $]-\infty; -1]$ .

a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer

b) Montrer que :  $g(-6) = 1$  et que  $g'(-6) = \frac{-1}{3}$

c) Déduire que  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et que  $(g^{-1})'(1) = -3$ .