

Exercice:

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par: $g(x) = 2\ln(x) + \frac{x-1}{x}$

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2- a- Calculer $g'(x)$, pour tout $x \in]0; +\infty[$; puis déduire que g est croissante sur $]0; +\infty[$.

b- Donner le tableau de variation de g .

3- Calculer $g(1)$ puis déduire que $(\forall x \in]0; 1])$; $g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [1; +\infty[)$; $g(x) \geq 0$

II - Soit f une fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = (2x-1)\ln(x) - x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat

2- a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b- Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3- a- Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

b- Donner le tableau de variation de f .

4- Construire (C) .

Solution

I-1- ■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\ln(x) + \frac{x-1}{x} \right) = -\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$)

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\ln(x) + \frac{x-1}{x} \right) = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$)

$$\begin{aligned} 2- a- \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } g'(x) &= \left(2\ln(x) + \frac{x-1}{x} \right)' \\ &= 2 \times \frac{1}{x} + \frac{(x-1)' \times x - (x-1) \times (x)'}{x^2} \\ &= 2 \times \frac{1}{x} + \frac{x - (x-1)}{x^2} \\ &= \frac{2x+1}{x^2} \end{aligned}$$

Comme $2x+1 > 0$ alors $g'(x) > 0$

D'où g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3- On a $g(1) = 2\ln(1) + \frac{1-1}{1} = 0$

■ Comme g est croissante sur l'intervalle $]0;1]$ alors $\forall x \leq 1 ; g(x) \leq g(1)$ d'où $g(x) \leq 0$.

■ Comme g est croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$ alors $\forall x \geq 1 ; g(x) \geq g(1)$ d'où $g(x) \geq 0$.

II- 1- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((2x-1)\ln(x) - x + 1) = +\infty$ (Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$)

Interprétation géométrique

(C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2- a- ■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x-1)\ln(x) - x + 1)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(\frac{2x-1}{x} \right) \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= +\infty$$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x} \right) \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$)

■ - ■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2x-1)\ln(x) - x + 1}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2x-1}{x} \right) \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= +\infty$$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x} \right) \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$)

b- Interprétation géométrique:

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées à voisinage de $+\infty$.

3- a- pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = ((2x-1)\ln(x) - x + 1)'$

$$= 2\ln(x) + (2x-1) \times \frac{1}{x} - 1$$

$$= 2\ln(x) + \frac{2x-1-x}{x}$$

$$= 2\ln(x) + \frac{x-1}{x}$$

$$= g(x)$$

D'après la question I-3- ■ $\forall x \leq 1 ; g(x) \leq 0$.

■ $\forall x \geq 1 ; g(x) \geq 0$.

Alors : - ■ $\forall x \leq 1 ; f'(x) \leq 0$.

■ $\forall x \geq 1 ; f'(x) \geq 0$.

Donc : f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$

Tableau de variation de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

4-Construction de (C):

