Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x^3+x^2+x-3$

1. a) *Etudier la monotonie de la fonction f*
   b) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x)=0$

2- *Soit g la fonction numérique définie sur* $]-\infty;1]$ *par :* $g(x)=\sqrt{1-x}$
   a) *Etudier la monotonie de g sur* $]-\infty;1]$
   b) *Résoudre l'équation* $f(x)=g(x)$.

3- *Soit h la fonction numérique définie par :* $h(x)=f\circ g(x)$
   a) *définir D l'ensemble de définition de h puis expliciter* $h(x)$
   b) *Etablir le tableau des variations de h*

Activité :

1- Dérivée de la réciproque :

f une fonction continue et strictement monotone sur I , $a\in I$.
On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a)\neq 0$.

On pose : $\begin{cases} F(x)=\dfrac{x-a}{f(x)-f(a)} & si\ x\neq a \\ F(a)=\dfrac{1}{f'(a)} & \end{cases}$

1. *Montrer que F est continue en a .*
2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to f(a)} F\left(f^{-1}(x)\right)$
3. *En déduire que* f^{-1} *est dérivable en* $f(a)$ *et calculer* $\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right)$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^3$

1. *Déterminer* D_f
2. *Etudier la monotonie de f sur* D_f
3. *Soit g la restriction de f sur l'intervalle* $[0;+\infty[$
   a) *Montrer que g admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer*
   b) *Déterminer* $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$

Exercice 3

Etudier la continuité au point donné de chacune des fonctions suivantes :

1. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & si \quad x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} & \end{cases} \quad (x_0=0)$

2. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-3x+2|}{x^2-4} & si \quad x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{1}{4} & \end{cases} \quad (x_0=2)$

Exercice 4

Etudier la continuité en x_0 de chacune des fonctions suivantes :

1. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-x^2} & si \quad x\neq 1 \\ f(1)=-\dfrac{3}{2} & \end{cases} \quad (x_0=1)$

2. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} & si \quad x>2 \\ f(2)=\dfrac{3}{4} & \\ f(x)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x-2} & si \quad x<2 \end{cases} \quad (x_0=2)$

Exercice 5

On considère la fonction of définie par : $f(x)=4x+1+\dfrac{1}{x-1}$

1. Déterminer D_f, puis calculer $f(1)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *et* $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

2. Calculer les limites de f Aux bornes de D_f

3. Calculer $f'(x)$; *pour tout* $x\in D_f$

4. Donner le tableau de variations de f

5. Donner les Images des intervalles Suivants : $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$; $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ *et* $\left]1;\dfrac{3}{2}\right]$

6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ *admet une solution unique dans l'intervalle* $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

Exercice 6

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=x^3-x^2+3x+1$

1) a) Montrer que la fonction est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ *.*

b) Déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;0]$

2) En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $0,25$

Montrer que : $\alpha=-\sqrt[3]{|\alpha^2-3\alpha-1|}$

Exercice 7

Soit la fonction numérique f définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=x-2\sqrt{x+1}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Etudier la continuité de f sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.
3. Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 ; puis interpréter géométriquement le résultat.
4. a) Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et donner $f'(x)$ pour tout x de $]-1;+\infty[$

   b) Dresser le tableau de variations de f.
5. Soit g la restriction de f sur $]0;+\infty[$

   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

   b) Calculer $g(3)$; puis déterminer $(g^{-1})'(-1)$

   c) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g(x)=(\sqrt{x+1}-1)^2-2$

   d) Déduire l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .