Série n° 2 Exercices sur « Les suites » **2éme Bac SM**

EXERCICE 1:

On considère la suite Un définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 1 + \dfrac{2}{U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

1- Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 1$

2- Monter que (U_n) est une suite croissante.

3- a) Montrer que : pour tout $n \in IN$; on a : $1 \leq U_{n+1} - U_n \leq 3$

b) monter par récurrence que :pour tout $n \in IN$,on a : $n+1 \leq U_n \leq 3n+1$.

4- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

5- On pose : pour tout $V_n = \dfrac{(-1)^0}{U_0} + \dfrac{(-1)^1}{U_1} + \dfrac{(-1)^2}{U_2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{2n}}{U_{2n}} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{U_k}$ et $W_n = V_n - \dfrac{1}{U_{2n+1}}$.

a) Monter que (V_n) et (w_n) sont deux suites adjacentes.

b) Donner un encadrement de $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

EXERCICE 2:(6points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n^{\ 2} - U_n + 1$

1- a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq 2$.

2- a) Montrer que si $U_n \geq n$ alors $U_n(U_n - 1) \geq n$

b) Montrer par récurrence que, , $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3- Soit la suite (S_n) définie par : $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{U_k}$

a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{U_n} = \dfrac{1}{U_n - 1} - \dfrac{1}{U_{n+1} - 1}$

b) En déduire que, $S_n = 1 - \dfrac{1}{U_n - 1}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4- On pose : $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (U_k - 1)^2$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = U_n - 2$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

EXERCICE 3:

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{5 - U_n^{\ 2}}}$

1- a) Montrer que $0 < U_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

2- a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1}\leq\frac{1}{2}U_n$

b) Montrer alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la limite de la suite (U_n)

3- Soit la suite (V_n) définie par $V_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; $V_n=\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}U_k}$

a) Montrer que la suite (V_n) est croissante

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $V_{n+1}-V_n\leq\frac{1}{2}U_n$

4- a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $V_n\leq 2-\frac{1}{2^n}$

b) En déduire que la suite (V_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite

EXERCICE 4:

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0\in IR$ et

$(\forall n\in IN)$, $U_{n+1}=\frac{1+U_n}{-1+U_n}$

On suppose que $U_0>1$

1- a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n>1$ et que $U_{n+1}-U_n>1$.

b) Montrer que (U_n) n'est pas majorée et donner sa limite.

II- On pose : $U_0=-\frac{1}{2}$.

1- a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $-1<U_n<0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

2- a) Montrer que $(\forall n\in IN)$ $U_{n+1}+1\leq\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{1}{2}\right)$; puis déduire que $(\forall n\in IN)$ $U_n+1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

b) Retrouver alors la limite de la suite U.

3) Pour tout $n\in IN^*$, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(U_k+1)$.

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer que la suite (S_n) est majorée par 1.

4) Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_0=1$ et $(\forall n\in IN)$ $V_{n+1}=V_n+\sqrt{V_n^{\,2}-U_n}$

a) Montrer que $(\forall n\in IN)$ $V_{n+1}-V_n\geq -U_n$; puis déduire que $(\forall n\in IN)$ $V_n\geq n-S_n+1$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

EXERCICE 5:

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0=\frac{1}{2}$ et $U_{n+1}=\sqrt{\frac{1+U_n^{\,2}}{2}}$ $(\forall n\in IN)$

1- a) Montrer que : $0<U_n<1$ $(\forall n\in IN)$

b) Montrer que (U_n) est croissante .En déduire qu'elle est convergente.

2- a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 < 1 - U_{n+1} < \frac{3}{2}(1 - U_n)$

b) En déduire que : $|U_n - 1| < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $(\forall n \in IN)$.

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

3- On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k^{\ 2}$ $(\forall n \in IN^*)$

a) Montrer que : $U_{k+1}^2 - U_k^2 = 1 - U_{k+1}^2$ $(\forall k \in IN^*)$

b) En déduire que : $S_n = n - 1 + 2U_1^2 - U_n^2$ $(\forall n \in IN^*)$

c) Montrer que : $n - \frac{3}{4} < S_n < n + \frac{1}{4}$ $(\forall n \in IN^*)$

En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.