

Exercice 1 : 3 pts

On considère les ensembles A et B suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{n \in \mathbb{N} / n^2 - 7n + 6 < 0\}$$

3pts Écrire en extension les ensembles A et B .

Exercice 2 : 3pts

On considère les ensembles A et B suivants :

$$3pts \quad A = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{6} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que : $B \subset A$ et $A \not\subset B$

Exercice 3 : 6 pts

On considère l'application f suivante : $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$$

1pt 1) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) : f(x) > 1$

1pt b- f est-elle surjective ? Justifier.

1pt 2) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) : f(2-x) = f(x)$

1pt b- f est-elle injective ? Justifier.

3) On considère l'application g suivante :

$$g :]1, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[\\ x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$$

2pts Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque g^{-1} .

Exercice 4 : 5 pts

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E .

1pt 1) Montrer que : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

1pt 2) Montrer que : $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

1,5pt 3) Montrer que : $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

1,5pt 4) Montrer que : $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B$

Exercice 5 : 3 pts

1pt 1) Montrer que : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : a \times b \leq a^2 + b^2$

2) Soient les ensembles : $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2ax + b = 0\}$ Et $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2cx + d = 0\}$

où a , b , c et d sont des nombres réels tels que : $b + d = ac$

2pts Montrer que : $A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$