Série n °10 d'exercices sur «limites et continuité» 2éme Bac SM

guessmaths

Exercice n°01 :

1- On considère la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1} & si\ x<\dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2 \\ f(x)=\dfrac{\sin(4x^2-1)}{2x-1} & si\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$

a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- On considère la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x+11}-\sqrt{2x-1}-2} & si\ x\geq\dfrac{1}{2}\ et\ x\neq\dfrac{5}{2} \\ f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{14}{3} \end{cases}$

a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3-Soient a et b des réels strictement positifs

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{b}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{b}{a} \end{cases}$

a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\left|f(x)-\dfrac{b}{a}\right|\leq\dfrac{|x|}{a}$ et déduire que : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\dfrac{b}{a}$

Exercice n°02 :

Calculer les limites suivantes :

► $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{a^2x^2+1}-ax+2}{1-3a+ax}$ $a\in\mathbb{R}_+^*$

► $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+1}}$

► $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x.\sqrt{\tan x}-\sin x.\sqrt{\sin x}}{x^3\sqrt{x}}$

► $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos x}$

► $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos x}$

► $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\tan(2x).\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

► $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+1}\cos x\right)$

► $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)}{x+1}$

► $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x}$

► $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{ax^n-xa^n}{x-a} \quad a\in\mathbb{R}$

► $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x^k-2^{n+1}+2}{(3-x)^{n+1}-1}$

► $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{4n+1}\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}-4}{1-x^{3n+2}}$

Exercice n°03 :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ *et soit* $n\in\mathbb{N}^*$ *on considère la fonction* g_n *définie par :* $g_n(x)=\dfrac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\cos^n(kx)}{1-\cos(ax)}$

On pose $U_n=\lim\limits_{x\to 0} g_n(x)$

1-Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $U_{n+1}=U_n+\dfrac{(n+1)^3}{a^2}$

2-En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $U_n=\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{n(n+1)^2}{2}\right)$

Exercice n°04 :

Montrer que :

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x^k-n}{x-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\cos(kx)}{x^2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\prod\limits_{k=1}^{n}\cos^n(kx)}{x^2}=\dfrac{n^2(n+1)(2n+1)}{12}$

Exercice n°05 :

Calculer les limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)-1}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-E(x)}{E(x)}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-1)^{E(x)} \dfrac{x-E(x)}{E(x)}$

Exercice n°06 :

On considère la fonction définie par : $f(x) = -x + \sqrt{x - E(x)}$

1- Déterminer D_f *le domaine de définition de f.*

2- soit $a \in \mathbb{Z}$ *; calculer* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

a) Montrer que $(\forall x \in D_f)$ *;* $-x \leq f(x) \leq -x+1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice n°07 :

Soit n E N on considère la fonction* f_n *définie par :* $f_n(x) = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\sin^k(x)\right)}{\cos^{2n} x}$

1- Montrer que : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos^k t}{\sin^2(t)} = \dfrac{k}{2}$ *avec* $k \in \mathbb{N}^*$

2- En déduire que : $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} f_n(x)$

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com WhatsApp : 0717467136