Exercice sur la limite et continuité

Exercice 1:

Calculer la limite des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-2x$ *(en $+\infty$)* *2.* $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$ *(en $+\infty$)*

3. $h(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ *(en0)* *4.* $\psi(x)=\dfrac{\sin(x)-\sin(3x)}{\sin(4x)}$ *(en0)*

Solution:

1− Ici les fonctions $\sqrt{x^2+x+1}$ *et* $2x$ *tendent toutes les deux vers $+\infty$, et donc on a une forme indéterminée (* $(+\infty)-(+\infty)$ *n'a pas un sens). Donc l'idée c'est de réécrire l'expression de la fonction f de sorte d'éviter cet obstacle. Pour* $x>0$ *, (on a le droit de le choisir positif car après on va tendre ce x vers $+\infty$, donc plus loin de zéro!), on a :*

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{x^2+x+1}-2x \\ &=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-2x. \\ &=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right) \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

Donc par continuité de la fonction racine carrée on a : $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2=\sqrt{1}-2=-1$

Finalement on a : $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

2− Par le même calcul que dans la question 1, on a pour tout x>0,

$$g(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

On a donc une forme indéterminée ($+\infty\times 0$). Donc on ne va pas raisonner comme dans la question 1, on doit alors avancer dans les calculs, en appliquant la règle du conjugué. On a alors, pour tout x>0,

$$\begin{aligned} g(x)&=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right) \\ &=x\left(\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\right) \end{aligned}$$

$$=x\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\right)$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$ *(car* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$*)*

3− Ici nous allons utiliser la relation (qui est vraie pour tout $a;b\in\mathbb{R}$ *:*

$\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Si on prend $a=0$ *et* $b=x$ *, comme* $\cos(0)=1$ *,et la fonction* $t\mapsto\sin(t)$ *est impaire alors*

$$1-\cos(x)=\cos(0)-\cos(x)$$
$$=-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(-\frac{x}{2}\right)$$
$$=2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Alors : $h(x)=\frac{2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{x^2}$.

On rappelle que (penser au fait que la fonction sinus est dérivable en 0, sin(0)=0 est que sin'(0)=1 ; $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$*)*

Donc par le changement de variable $u=\frac{x}{2}$*, on a* $u\to 0$ *si* $x\to 0$ *, et donc*

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}$$

5− Soit $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \neq 0$ *. On a alors :* $\psi(x) = \dfrac{x}{\sin(4x)} \times \dfrac{\sin(x) - \sin(3x)}{x}$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4x}{\sin(4x)} \times \left(\frac{\sin(x)}{x} - 3\frac{\sin(3x)}{3x} \right)$$

En utilisant la remarque dans la question 3 (bien sûr avec des changements de variable) on trouve :

$$\lim_{x \to 0} \psi(x) = \frac{1}{4}(1-3) = -\frac{1}{2}$$