Devoir Surveillé n°1–Continuité 1er semestre

2éme Bac SM

Exercice 01 : ***(02 points)***

On considère dans R, l'équation : $(E): \dfrac{1}{1+x^{2019}} = \lambda$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$

✓*Déterminer suivant les valeurs de* λ *l'ensemble des solutions de* (E)

Exercice 02 : ***(1,5 points)***

On pose : $a = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}\right)$

1) Vérifier que : $0 < \pi - 2a < \dfrac{\pi}{2}$

2) Calculer $\tan(\pi - 2a)$*, puis déduire que :* $\operatorname{Arctan}\left(2\sqrt{2}\right) + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}\right) = \pi$

Exercice 03 ***: (2,5 points)***

On considère la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - (1+ax)}{x^2}$ *où* $a \in \mathbb{R}$

1) Déterminer D_f *le domaine de définition de f.*

2) Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquels la fonction f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 0$.

Exercice 04 ***: (4 points)***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x + 2 + x\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

b) Justifier soigneusement que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que : $\left(\exists a\in\left]0,1\right[\right)\ ;\ f\left(a+1\right)=f\left(a\right)$.

<u>Exercice 05</u> (03 points)

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{1-x^2} & si\,x<-1 \\ f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^2-2x+5} & si\,x\geq -1 \end{cases}$

1)- Justifier que : $D_f=\mathbb{R}$*.(où* D_f *est le domaine de définition de f).*

2) a) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $\left]-\infty,-1\right[$ *et* $\left[-1,+\infty\right[$.

b) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$ *? Justifier votre réponse.*

<u>Exercice 06</u> (07 points)

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{2}{\pi}-1,+\infty\right[$ *par :* $f\left(x\right)=\tan\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

1)-a) Calculer les limites de f aux bornes de I.

b) Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.

2) a)- Montrer que l'équation $\left(F\right):\ f\left(x\right)=\ x$ *admet une solution unique a dans I ; et que*

$a\in\left]0,1\right[$

b)- Déterminer la position relative de $\left(C_f\right)$ *la courbe de f par rapport à la droite*

$\left(\Delta\right)$ *d'équation* $y=x$ *sur I.*

3)-a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur un intervalle J que l'on déterminera.*

b) Déterminer $f^{-1}\left(x\right)$ *pour tout* $x\in J$ *.*

Correction

Exercice 01 :

$(E): \dfrac{1}{1+x^{2019}} = \lambda$ *Où* $\lambda \in \mathbb{R}$

●) *Ensemble de définition de l'équation* (E)

Soit $x \in \mathbb{R}$ *; x est solution de l'équation* (E) *si et seulement si*

$$\begin{aligned} 1+x^{2019} \neq 0 &\Leftrightarrow x^{2019} \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x^{2019} \neq (-1)^{2019} \\ &\Leftrightarrow x \neq -1 \end{aligned}$$

Donc le domaine d'étude de l'équation (E) *est* $\mathbb{R} - \{-1\}$

●) *Résolution de l'équation* (E)

1^er^ Cas

Si $\lambda = 0$ *alors l'équation* (E) *n'admet pas de solution car* $(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $\dfrac{1}{1+x^{2019}} \neq 0$

2éme Cas

Si $\lambda \neq 0$ *alors x est solution de l'équation* $(E) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+x^{2019}} = \lambda$ *et* $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\Leftrightarrow x^{2019} = \frac{1}{\lambda} - 1 \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\Leftrightarrow x^{2019} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

●) *Si* $\lambda \in]0;1]$ *; alors :* $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt[2019]{\dfrac{1-\lambda}{\lambda}}$

D'où $S = \left\{ \sqrt[2019]{\dfrac{1-\lambda}{\lambda}} \right\}$

●) *Si* $\lambda \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ *; alors :* $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \leq 0 \Rightarrow -x^{2019} = -\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$

$$\Rightarrow x = -\sqrt[2019]{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \text{ et on a : } \frac{\lambda-1}{\lambda} \neq 1$$

D'où $S = \left\{ -\sqrt[2019]{\dfrac{\lambda-1}{\lambda}} \right\}$

Exercice 02 :

$a = \text{Arctan}\left(\sqrt{2}\right)$

1) On a : $1<\sqrt{2}$ *et la fonction* Arctan *est strictement croissante majorée par* $\frac{\pi}{2}$ *; donc :*

$$1<\sqrt{2} \Leftrightarrow \text{Arctan}(1)<\text{Arctan}\left(\sqrt{2}\right)<\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\pi<-2a<-\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0<\pi-2a<\frac{\pi}{2}}$$

2) On a :
$$\begin{aligned}\tan(\pi-2a)&=\tan(-2a)\\&=-\tan(2a)\\&=-\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{1-2}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\tan(\pi-2a)=2\sqrt{2}}$

On a : $\tan(\pi-2a)=2\sqrt{2}$ *et* $0<\pi-2a<\frac{\pi}{2}$ *; donc :*

$$\text{Arctan}\left(2\sqrt{2}\right)=\pi-2a \Leftrightarrow \text{Arctan}\left(2\sqrt{2}\right)=\pi-2\text{Arctan}\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{Arctan}\left(2\sqrt{2}\right)+2\text{Arctan}\left(\sqrt{2}\right)=\pi}$$

<u>Exercice 03</u> : (2,5 points)

$$f: x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2} \quad \text{où } a\in\mathbb{R}$$

1) Soit $x\in\mathbb{R}$ *; on a :*
$$\begin{aligned}x\in D_f &\Leftrightarrow 1+x\geq 0 \text{ et } x^2\neq 0\\&\Leftrightarrow x\geq -1 \text{ et } x\neq 0\\&\Leftrightarrow x\in[-1;0[\cup]0;+\infty[\end{aligned}$$

Donc $\boxed{D_f=[-1;0[\cup]0;+\infty[}$

2) $(\forall x\in D_f)$ *;* $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2}$

$$= \frac{1+x-(1+ax)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+(1+ax)\right)}$$

$$= \frac{-a^2x^2+(1-2a)x}{x^2\left(\sqrt{1+x}+(1+ax)\right)}$$

$$= \frac{-a^2x+(1-2a)}{x\left(\sqrt{1+x}+(1+ax)\right)}$$

► *Si* $a=\frac{1}{2}$ *; alors :* $f(x)=\frac{-1}{4\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{8}}$

Dans ce cas f admet un prolongement par continuité g en 0 *définie sur* $[-1;+\infty[$ *par :*

$$g(x)=\frac{-1}{4\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}$$

► *Si* $a>\frac{1}{2}$ *; alors :* $f(x)=\frac{-a^2x+(1-2a)}{x\left(\sqrt{1+x}+(1+ax)\right)}$

Donc $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \end{cases}$

► *Si* $a>\frac{1}{2}$ *; alors :* $f(x)=\frac{-a^2x+(1-2a)}{x\left(\sqrt{1+x}+(1+ax)\right)}$

Donc $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$

Dans ces deux cas f n'admet pas de limite en $0/$

Conclusion : *f admet un prolongement par continuité en* 0 *si et seulement si* $a=\frac{1}{2}$.

<u>Exercice 04</u> :

f: $\begin{cases} f(x)=x^3-4x+2+x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\pi}{x}=0$; et la fonction $\cos$ est continue en 0 ; donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=\cos(0)=1$$

► Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=+\infty$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-4x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

► Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=-\infty$; de plus $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-4x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$

2) a) $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)$; $\left|x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|\le|x|$

Et $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$; donc $\lim\limits_{x\to0}x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=0$

D'autre part $\lim\limits_{x\to0}\left(x^3-4x+2\right)=2$

. Donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$ et $f(0)=2$

Alors f est continue en $x_0=0$

b) ● La fonction rationnelle $x\mapsto\frac{\pi}{x}$ est continue sur chacun des intervalles $\left]-\infty,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$; la fonction $x\mapsto\cos x$ est continue $\mathbb{R}$; donc la fonction $x\mapsto\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est continue sur chacun des intervalles $\left]-\infty,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$

● La fonction polynôme $x\mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x\mapsto x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est continue sur chacun des intervalles $\left]-\infty,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$

● La fonction polynôme $x\mapsto x^3-4x+2$ est continue sur chacun des intervalles $\left]-\infty,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$

Donc f est continue sur chacun des intervalles $\left]-\infty,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$

D'après la question 2) a) f est continue en $x_0=0$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) On pose : $g(x)=f(x+1)-f(x)$ où $x\in\mathbb{R}$.

Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto f(x)$ sont continue sur $\mathbb{R}$; la fonction $x \mapsto f(x+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux foncions continues.
Donc g est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continue sur $\mathbb{R}$; par suite g est continue sur l'intervalle $[0;1]$; on a : $f(0)=2$; $f(1)=-2$ et $f(2)=2$
Donc : $g(0)=-4$ et $g(1)=4$
par suite : $g(0)\times g(1)<0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel $(\exists a \in]0;1[) / g(a)=0$; d'où : $\boxed{(\exists a \in]0;1[) / f(a+1)=f(a)}$.

__Exercice 05__

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{1-x^2} & si\, x<-1 \\ f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x+5} & si\, x\geq -1 \end{cases}$

1)- On a : $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=1$ où $x=-1$

Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3-2x^2-3x}{1-x^2}$ est bien définie sur $]-\infty;-1[$

On a : $x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$; donc la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^2-2x+5}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$; en particulier sur $[-1;+\infty[$

D’où : $D_f=\mathbb{R}$.

2) a) ► La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^3-2x^2-3x}{1-x^2}$ est continue sur $]-\infty;-1[$; donc f est continue sur $]-\infty;-1[$

► La fonction polynôme $x \mapsto x^2-2x+5$ est continue et positive sur $[-1;+\infty[$; donc la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^2-2x+5}$ est continue sur $[-1;+\infty[$; donc f est continue sur $[-1;+\infty[$

b) Puisque f est continue sur $]-\infty;-1[$ et sur $[-1;+\infty[$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue à gauche en (-1).

On a : $f(-1)=2$

Calculons $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

On a : $\forall x<-1$; $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{1-x^2}$

$$=\frac{x(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x(x-3)}{(x-1)}$$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\frac{x(x-3)}{(x-1)}\right)=2$ *et* $f(-1)=2$ *; donc f est continue à gauche en* (-1).

Par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 06

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{2}{\pi}-1,+\infty\right[$ *par :* $f(x)=\tan\left(\frac{1}{x+1}\right)$

1)-a) ● On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0$ *et la fonction* $x\mapsto \tan x$ *est continue en* 0*; donc*

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\tan 0=0$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

● *On pose* $t=\frac{1}{x+1}$ *; on a :* $x\to\left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+ \Rightarrow t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ *; Donc*

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+} f(x)=\lim\limits_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan(t)=+\infty$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+} f(x)=+\infty}$

b) La fonction rationnelle $u: x\mapsto\frac{1}{x+1}$ *est continue et strictement décroissante sur*

$I=\left]\frac{2}{\pi}-1,+\infty\right[$ *; avec* $u(I)=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction $x\mapsto\tan x$ *est continue et strictement croissante sur* $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *; donc f est continue strictement décroissante sur I.*

(Comme composée de deux fonctions continue de monotonies différentes)

2) a) On considère les fonctions g définie sur I par : $g(x)=f(x)-x$

Les fonctions $x\mapsto f(x)$ *et* $x\mapsto -x$ *sont continue et strictement décroissante sur I ; donc g est continue et strictement décroissante sur I ; on a :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to \left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+} (-x) = 1 - \frac{2}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+} g(x) = +\infty$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to \left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+} g(x) = +\infty}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

Donc g est une bijection de I vers $g(I) =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$ *et comme* $0 \in \mathbb{R}$ *; alors l'équation* $g(x) = 0$ *(càd:* $f(x) = x$ *) admet une unique solution a dans I.*

On a : $\begin{cases} g(0) = f(0) = \tan(1) > 0 \qquad (car\, 0 < 1 < \frac{\pi}{2}) \\ g(1) = f(1) - 1 = \tan\left(\frac{1}{2}\right) - 1 > 0 \quad (car\, 0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

Donc : $g(1) < 0 < g(0)$ *et* g^{-1} *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *, alors :*
$g^{-1}(g(1)) < g^{-1}(0) < g^{-1}(g(0))$ *; Càd :* $0 < a < 1$

Donc : $\boxed{a \in]0;1[}$

b) Le signe de $f(x) - x$ *sur I est celui de* $g(x)$.

<u>Tableau de variation et de signe de g</u>

x	$\frac{2}{\pi}-1$		a		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

<u>Conclusion</u>.

$\cdot$) sur l'intervalle $\left]\frac{2}{\pi}-1;a\right]$ la Courbe de f est au-dessus de la droite (Δ)

$\cdot$) sur l'intervalle $[a;+\infty[$ le courbe de f est au-dessous de la droite (Δ)

3) a) D'après la question 1) b) la fonction f est continue et strictement décroissante sur I donc f admet une fonction réciproque f^{-1} de finie sur l'intervalle

$$J = f(I) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x);\ \lim_{x\to\left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+} f(x)\right[$$

D'après 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{\pi}-1\right)^+} f(x)=+\infty$; donc $J=]0;+\infty[$

b) Soit t $x\in J=]0;+\infty[$

On a : $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=f(y) \\ y\in I \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\left(\dfrac{1}{1+y}\right)=x \\ 0<\dfrac{1}{1+y}<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+y}=\operatorname{Arctan}(x) \\ y\in I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{\operatorname{Arctan}(x)}-1 \\ y\in I \end{cases}$$

<u>Conclusions</u>

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ \boxed{f^{-1}(x)=\frac{1}{\operatorname{Arctan}(x)}-1}$$