GUESSMATHS

Revue n°2 :

Chapitre « Dérivabilité et étude de fonction»

2éme Bac SC. Maths A et B

Contenue du chapitre :

- Résumé du cours
- Exercices d'application
- Astuces et méthodes
- Série d'exercices corrigés

1er Conseil aux bacheliers afin de bien préparer leur Examen

Comme dit le proverbe français « rien ne se perd rien ne se crée tout se transforme »

Alors le secret de la réussite c'est de travailler régulièrement.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com
whatsapp : 0711746713

DERIVATION

1) DERIVABILITE

Définition :

On dit qu'une fonction f est dérivable en a si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie ℓ en a. Le réel ℓ s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$

Théorème :

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
La réciproque n'est pas toujours vraie.

2) TANGENTE A UNE COURBE

Propriété :

Si f est dérivable en a, alors la courbe (C_f) admet au point $A(a;f(a))$ une tangente d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

3) DERIVABILITE A GAUCHE ET A DROITE EN UN POINT

Définition :

* f est dérivable à gauche en a si $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et finie, on la note $f_g'(a)$

* f est dérivable à droite en a si $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et finie, on la note $f_d'(a)$

Propriété :

f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et $f_g'(a)=f_d'(a)$

Interprétation géométrique :

- Si $f_g'(a)\neq f_d'(a)$, alors (C_f) admet au point $A(a;f(a))$ deux demi-tangentes, on dit que A est un point angulеux.
- Si $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$,alors (C_f) admet à gauche du point $A(a;f(a))$ une demi tangente verticale dirigée vers le bas.

4) DERIVABILITE SUR UN INTERVALLE – FONCTION DEIVEE

Définition :

1) On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tout point de I.
2) On dit que f est dérivable sur $[a;b]$ si f est dérivable sur $]a;b[$ et dérivable à gauche en a et à droite en b
3) On appelle fonction dérivée de f la fonction qui à tout point x de D_f associe son nombre dérivé $f'(x)$ s'il existe, on la note f'.

Dérivée de fonctions usuelles :

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de définition	Ensemble de dérivation $D_{f'}$
k avec k constante	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$]0,+\infty[$
$\sin$	$\cos$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos$	$-\sin$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\tan$	$1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$
$f+g$	$f'+g'$		
αf avec $\alpha\in\mathbb{R}$	αf		
$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$		
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$		
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$		
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$		
f^n où $n\in\mathbb{N}^*$	$nf'\times f^{n-1}$		

Applications de la dérivation

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) Si sa dérivée f' est strictement positive sur I (sauf éventuellement en des points isolés), Alors f est strictement croissante sur I

2) Si sa dérivée f' est strictement négative sur I (sauf éventuellement en des points isolés), Alors f est strictement décroissante sur I

3) Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $\alpha\in I$.

f admet un extrémum en a ssi f' s'annule en a en changeant de signe.

Dérivée d'une fonction composée

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables respectivement en a et $f(a)$, alors la fonction composée $g\circ f$ est dérivable en a et on a : $(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$

Dérivée de la bijection réciproque

Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $f(I)=J$ et f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est dérivable en a et $f'(a)\neq 0$ alors : f^{-1} est dérivable en $b=f(a)$ et on a : $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$ càd $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Application :

Théorème :

La fonction $x\mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

Conséquences :

* Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et $(\forall x\in I)$; $u(x)>0$, alors la fonction $x\mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :$(\forall x\in]0;+\infty[)$;$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$

* **La dérivée de** : $x\mapsto x^r$ où $r\in\mathbb{Q}$

Théorème :

*$x\mapsto x^r$ où $r\in\mathbb{Q}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)$;$(x^r)'=rx^{r-1}$

*Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et $(\forall x\in I)$; $u(x)>0$ et $r\in\mathbb{Q}$ alors : $x\mapsto u^r(x)$ est dérivable sur I et on a :$(\forall x\in I)$; $(u^r(x))'=ru'(x)u^{r-1}(x)$

Dérivée de la fonction arctan

Théorème

* La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :$(\forall x\in\mathbb{R})$;$(\arctan(x))'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\forall x\in\mathbb{R}):\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

* Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x\mapsto\arctan(u(x))$ est dérivable sur I et on a:$(\forall x\in\mathbb{R})$;$(\arctan(u(x)))'=\dfrac{(u(x))'}{1+(u(x))^2}$:

Théorème de Rolle :

Si f est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et $f(a)=f(b)$ alors :

$\exists c \in]a;b[/ f'(c)=0$

Théorème des accroissements finis

Si f est continue sur et dérivable sur alors : $\exists c \in]a;b[/ f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

Remarque :

Si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors elle existe une tangente à la courbe de f sur $[a;b]$ parallèle à la droite (AB) (A et B étant les points d'abscisses respectives a et b)

Conséquences :

1) **Inégalité des accroissements finis**

*Si f est continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et $(\exists k>0)(\forall x \in]a;b[)/|f'(x)| \leq k$, alors $|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$

*Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $(\exists k>0)(\forall x \in I):|f'(x)| \leq k$

Alors :$(\forall (a;b) \in I^2)$; $|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$

2) Si f est continue sur un intervalle $[a;b]$; dérivable sur $]a;b[$ et $(\forall x \in]a;b[)$ $m \leq f'(x) \leq M$, alors : $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$

DERIVATION / METHODES

1) Si on veut étudier la dérivabilité d'une fonction f en a.

- **On peut** utiliser les résultats sur les opérations.
- **On peut** chercher si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en a.
- **On peut** chercher si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie à droite en a et une limite finie à gauche en a, puis comparer ces deux résultats.

2) Si on veut étudier la dérivabilité d'une fonction f sur un intervalle ouvert I.

- **On peut** utiliser les opérations sur les fonctions dérivées.
- **On peut** chercher si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en tout point a de I.

3) Si on veut montrer que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle ouvert I.

- **On peut** calculer $f(x)-g(x)$ et déterminer son signe, si possible.
- **On peut** étudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x)-g(x)$, puis on déduit son signe.
- **On peut** utiliser le théorème des accroissements finis.
- **On peut** utiliser l'inégalité des accroissements finis.

4) Si on veut montrer que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution sur un intervalle I.

- **On peut** montrer que $x \mapsto f(x)-g(x)$ est une bijection de I sur $J=f(I)$ et que $0 \in J$.

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com
whatsapp : 0711746713

• **On peut** appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction , $x \mapsto f(x) - g(x)$ si I est un segment.

5)Si on veut déterminer la limite d'une expression en a.

• **On peut** utiliser les méthodes vues au chapitre 1.

• **On peut** mettre l'expression sous la forme $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et utiliser la notion de dérivée.

6)Si on veut montrer que la fonction dérivée f' s'annule sur un intervalle I .

• **On peut** résoudre l'équation $f'(x)=0$ si possible.

• **On peut** appliquer le théorème de Rolle.

7)Si l'on veut montrer qu'une fonction réciproque f^{-1} est dérivable en b.

• **On peut** chercher l'antécédent a de b par f, puis vérifier que :
f est dérivable en a et que $f(a) \neq 0$.

• **On peut** montrer que $\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(b)}{x-b}$ a une limite finie en b en faisant le changement de variable $t = f^{-1}(x)$.

8) Si on veut montrer que la courbe d'une fonction réciproque f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

• **On peut** chercher l'antécédent a de b par f, puis vérifier que : f est dérivable en a et que $f'(x)=0$.

• **On peut montrer** que $\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(b)}{x-b}$ a une limite infinie en b.

Série d'exercices corrigés dérivabilité

EXERCICE 1

Étudier la dérivabilité de f en x_0 dans les cas suivants, puis donner une interprétation géométrique :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \arctan\sqrt{x^2-1} & si\ x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\sqrt[3]{1-x} & si\ x < 1 \end{cases}$$

CORRECTION

$$1/\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a : $(\forall x\in IR^*)$; $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le 1$

Donc : $(\forall x\in IR^*)$; $|x|\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le |x|$

D'où : $(\forall x\in IR^*)$; $\left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le |x|$

$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$; alors f est dérivable en 0, et $f'(0)=0$

<u>Interprétation géométrique :</u>

La courbe de f admet une tangente horizontale au point $O(0;0)$.

2/ $\begin{cases} f(x)=\arctan\sqrt{x^2-1} & si\ x\ge 1\\ f(x)=(x-1)\sqrt[3]{1-x} & si\ x<1\end{cases}$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}\times\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\quad (\text{On pose : } t=\sqrt{x^2-1})$$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arctan(t)}{t}=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Alors f n'est pas dérivable à droite en 1, d'où f n'est pas dérivable en 1.

<u>Interprétation géométrique :</u>

La courbe de f admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(1,0)$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\sqrt[3]{1-x}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{1-x}=0$$

Donc f est dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1)=0$

Interprétation géométrique :

La courbe de f admet une demi-tangente horizontale à gauche du point $A(1;0)$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=2x^2+b & si\ \ x\le 2 \\ f(x)=2ax^3+11a & si\ \ x>2 \end{cases}$

a et b deux nombres réels .

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 2

CORRECTION

Supposons que f est dérivable en 2 donc continue en 2 d'où $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

Alors $27a=8+b$

D'où : $b=27a-8$

f est dérivable en 2,donc : $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2ax^3+11a-(8+b)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2ax^3+11a-27a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2ax^3-16a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2a(x^3-8)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2a(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}2a(x^2+2x+4)=24a$$

Donc $f_d'(2)=24a$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2+b-(8+b)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x^2-4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}2(x+2)=8$$

Donc $f_g'(2)=8$;$24a=8\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$ et $b=27a-8\Rightarrow b=1$

Conclusion :

Pour que f soit dérivable en 2 il faut que : $a=\frac{1}{3}$ et $b=1$.

EXERCICE 3

En utilisant la composée, étudier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

2) $f(x)=\sqrt{x-2}\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$

CORRECTION

1) $f(x)=\cos\sqrt{x^2+1}$

Soit $h(x)=\sqrt{x^2+1}$ et $g(x)=\cos x$; alors $f=g\circ h$

h est dérivable sur IR ; $h(IR)\subset IR$ et g est dérivable sur IR donc $g\circ h$ est dérivable sur IR ; d'où f est dérivable sur IR ; et pour tout $x\in IR$ on a :

$$f'(x)=h'(x)\times g'(h(x))$$

$$f'(x)=\left(\cos\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(-\sin\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\left(-\sin\sqrt{x^2+1}\right)'$$

2/ $f(x)=\sqrt{x-2}\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$

$$x\in D_f \Leftrightarrow x-2\geq 0 \text{ et } \frac{\pi}{x}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x\geq 2 \text{ et } \frac{\pi}{x}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z} \quad \left(\frac{\pi}{x}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z} \;; x\neq 2\right)$$

$$\Leftrightarrow x>2 \text{ et } \frac{\pi}{x}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$$

$$x>2 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{x}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{x}<\frac{\pi}{2}$$

Et $x \mapsto \tan x$ est définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc

$D_f =]2;+\infty[$ (Car f n'est pas définie en 2)

On a : $u : x \mapsto \frac{\pi}{x}$ est dérivable sur $]2;+\infty[$; $u(]2;+\infty[) \subset \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $v : x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $]2;+\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est dérivable sur $]2;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]2;+\infty[$

Pour tout $x \in]2;+\infty[$:
$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = -\frac{\pi}{x^2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

Donc : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right) - \dfrac{\pi\sqrt{x-2}}{x^2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur IR^+ par : $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2}$

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) Étudier la dérivabilité de f à droite de 0, puis donner une interprétation géométrique

3) Étudier les variations de f

CORRECTION

1/
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty}\sqrt[3]{x}\left(3 - 4\sqrt[3]{x}\right) = -\infty$$

(Car $\lim_{x \to +\infty}\sqrt[3]{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}\left(3 - 4\sqrt[3]{x}\right) = -\infty$)

2/
$$\lim_{x \to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+}\frac{3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}\left(3-4\sqrt[3]{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\left(3-4\sqrt[3]{x}\right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} 3 - 4\sqrt[3]{x} = 3$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique :

La courbe de f admet une demi-tangente verticale, dirigée vers le haut à droite du point $O(0,0)$

3/ f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{3}{3\sqrt[3]{x^2}}-4\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$$
$$=\frac{3}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$$
$$=\frac{3-8\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Alors le signe de $f'(x)$ est celui de $3-8\sqrt[3]{x}$ sur $]0,+\infty[$:

$$3-8\sqrt[3]{x}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}\leq\frac{3}{8}$$
$$\Leftrightarrow 0<x\leq\frac{27}{512}$$

D'où le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{27}{512}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	$-\infty$

EXERCICE 4

Montrer que :$(\forall x\in IR)$; $2\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$

CORRECTION

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\arctan(x)$

On a : $x\mapsto\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=2\left(\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)'+\left(\arctan(x)\right)'$

$$=2\times\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'}{1+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$=2\times\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2\times\frac{\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1-x\sqrt{x^2+1}\right)}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\times\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

Donc f est constante sur IR.

Alors $(\forall x\in IR)\ ; f(x)=f(0)=\dfrac{\pi}{2}$

D'où : $(\forall x\in IR)\ ; 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\arctan(x)=\dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE 6

Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}$ b) $-\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[2017]{x+3}-\sqrt[2017]{2}\sqrt[2017]{x}$

CORRECTION

Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Soit $f(x)=\arctan x$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x\in\mathbb{R}) : f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$$=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

Calculons $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[2017]{x+3}-\sqrt[2017]{2}\sqrt[2017]{x}$ alors $f(3)=0$ et f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\frac{1}{2017\sqrt[2017]{x+3}^{2016}}-\frac{\sqrt[2017]{2}}{2017\sqrt[2017]{x}^{2016}}$$

Alors :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[2017]{x+3}-\sqrt[2017]{2}\sqrt[2017]{x}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=f'(3)$$

$$=\frac{1}{2017\sqrt[2017]{6}^{2016}}-\frac{\sqrt[2017]{2}}{2017\sqrt[2017]{3}^{2016}}$$

$$=\frac{1}{2017\sqrt[2017]{3}^{2016}}\left(\frac{1}{\sqrt[2017]{2}^{2016}}-\sqrt[2017]{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2017\sqrt[2017]{3}^{2016}}\times\frac{-1}{\sqrt[2017]{2}^{2016}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt[2017]{6}^{2016}}$$

EXERCICE 11

1) Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par :

$g(x)=\sin x-x\cos x$

Étudier les variations de g et déduire le signe de g sur $[0,\pi]$.

2) Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par

$f(x)=x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que f est dérivable sur $[1,+\infty[$

et que : $\forall\ x\in[1,+\infty[\quad f'(x)=g\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

c) En déduire que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle I à préciser.

d) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur I et

calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

3) Soit $h(x)=f(x)-x$ où $x\in[1,+\infty[$.

a) Étudier les variations de h' sur $[1,+\infty[$ et en déduire que l'équation $h'(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans $[1,+\infty[$

b) Déterminer la valeur de x_0

c) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite d'équation $y=x$ sur $[1,+\infty[$

CORRECTION

1/ $(\forall x\in[0;\pi])\ g(x)=\sin x-x\cos x$

g est dérivable sur $[0,\pi]$

$(\forall x \in [0;\pi])\ g'(x) = x\sin x \geq 0$

$(car\ x \in [0,\pi] et\ \sin x \geq 0)$

Donc g est strictement croissante sur $[0,\pi]$

Alors $(\forall x \in [0;\pi])\ g(x) \geq g(0)$ et $g(0) = 0$

Donc : $(\forall x \in [0;\pi])\ g(x) \geq 0$

2/ a) $(\forall x \in [1;+\infty[)\ f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

On pose : $t = \frac{\pi}{x}$ quand $x \to +\infty, t \to 0$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = \lim_{t\to 0}\left(\pi\frac{\sin t}{t}\right) = \pi$

<u>Interprétation géométrique</u> :

(C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = \pi$ au voisinage de $+\infty$

b) $v : x \to \frac{\pi}{x}$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $v([1;+\infty[) \subset \mathbb{R}$

$x \to \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,donc :

$x \to \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est dérivable sur $[1;+\infty[$

$x \to x$ est dérivable sur $[1;+\infty[$

Donc f est dérivable sur $[1;+\infty[$

Et on a : $\forall x \in [1;+\infty[\ 0 < \frac{1}{x} \leq 1$ et $0 < \frac{\pi}{x} \leq \pi$ alors :

$$(\forall x \in [1;+\infty[)\ f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - x\frac{\pi}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$= g\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

c) On a f est dérivable sur $[1,+\infty[$ (d'après 2-b))

Donc f est continue sur $[1,+\infty[$ et $(\forall x \in [1;+\infty[)\ 0 < \frac{\pi}{x} \leq \pi$

Donc : $g\left(\frac{\pi}{x}\right) \geq 0$ (d'après 1)

D'où : $(\forall x \in [1;+\infty[)\ f'(x) \geq 0$

Alors f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ d'où f est bijective de $[1,+\infty[$ vers I tel que : $I = f([1,+\infty[) = \left[f(1); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0;\pi[$

d) On a f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $(\forall x\in[1,+\infty[)\ g(0)<g\left(\frac{\pi}{x}\right)$

(car $(\forall x\in[1,+\infty[)\ \frac{\pi}{x}>0$ et g est strictement croissante sur $[0;\pi[$)

D'où $(\forall x\in[1,+\infty[)\ f'(x)>0$

Donc $(\forall x\in[1,+\infty[)\ f'(x)\neq 0$

Alors f^{-1} la fonction réciproque de f est dérivable sur I et on a :

■ $\left(f^{-1}\right)'(0)=\left(f^{-1}\right)'(f(1))$

$$=\frac{1}{f'(1)}=\pi$$

■ $\left(f^{-1}\right)'(2)=\left(f^{-1}\right)'(f(2))$

$$=\frac{1}{f'(2)}=1$$

3/ $(\forall x\in[1,+\infty[)\ h(x)=f(x)-x$

a) Pour tout $x\in[1,+\infty[$: $h'(x)=f'(x)-1$

Donc : $h''(x)=f''(x)=\left(g\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'$

$$=-\frac{\pi}{x^2}g'\left(\frac{\pi}{x}\right)<0$$

(car $\left(x\in[1;+\infty[\right)\Leftrightarrow\ 0<\frac{\pi}{x}\leq\pi$ donc ; $g'\left(\frac{\pi}{x}\right)>0$)

Alors : $(\forall x\in[1;+\infty[)\ h''(x)\leq 0$ et par suite h' est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Alors : $h'([1;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x);h'(1)\right]$

Et : $\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(\frac{\pi}{x}\right)-1$

$$=g(0)-1\quad(\text{car } g \text{ est continue en } 0)$$

$$=-1$$

Et $h'(1)=g(\pi)-1=\pi-1$

D'où : $h'([1;+\infty[)=[-1;\pi-1[$

Et $0\in[-1;\pi-1[$ donc l'équation $h'(x)=0$ admet une unique solution $x_0\in[1;+\infty[$

b) $h'(2)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)-1=1-1=0$ et $h'(x_0)=0$ et $2\in[-1;(\pi-1)[$ donc $x_0=2$ (car x_0 est unique) c)

x	1	2	$+\infty$
$h''(x)$		$-$	
$h'(x)$	$(\pi-1)$ ↘	0 ↘	-1

- $h'([1;2]) = [0,(\pi-1)]$ *donc* $(\forall x \in [1,2])\, h'(x) \geq 0$
- $h'([2;+\infty[) =]-1;0]$ *donc* $(\forall x \in [2;+\infty[)\quad h'(x) \leq 0$

D'où

x	1	2	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	0	↘

Donc 0 est une valeur maximale de h ;

Alors : $(\forall x \in [1;+\infty[)\ h(x) \leq 0$

D'où $(\forall x \in [1;+\infty[)\ f(x) \leq x$

Donc (C_f) est au-dessous de la droite (D) d'équation : $y = x$ sur l'intervalle $[1;+\infty[$

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} - x$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Donner le tableau de variation de f

2) Montrer qu'il existe un seul réel α de $]2,3[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

c) Montrer que : $(f^{-1})'(\alpha) = \dfrac{4\alpha^2}{9-4\alpha^2}$

CORRECTION

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} - 1\right)\right)$

$= -\infty$

b) $(\forall x \in [0;+\infty[);\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - 1$

$x \geq 0$ *donc* $(x+1)^2 \geq 1$ *et* $\sqrt[3]{(x+1)^2} \geq 1$

D'où : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \leq 1$

Donc : $f'(x) \leq 0$

Alors f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	3 ↘	$-\infty$

2. Soit g définie par : $(\forall x \in [0;+\infty[); g(x) = f(x) - x$

f et la fonction identité $x \mapsto x$ sont continues sur $[0;+\infty[$

Donc g est continue sur $[0;+\infty[$

Et $(\forall x \in [0;+\infty[); g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \quad (car\ f'(x) \leq 0; \forall x \in [0;+\infty[)$

D'où g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

Donc g est bijective de $[0;+\infty[$ vers $]-\infty;3]$ et $0 \in]-\infty;3]$.

Alors $(\exists! \alpha \in]-\infty;3]) / g(\alpha) = 0$

On a : $g(2) \cdot g(3) < 0$

Donc : d'après le T.V.I $\alpha \in]2;3[$

3. a) f est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$; donc f admet une fonction réciproque définie sur : $J = f([0;+\infty[) =]-\infty;3]$

b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) \neq 0$

alors f^{-1} est dérivable sur $]-\infty;3[$ et on a : $f'_d(0) = 0$

donc : (C_f) admet une demi- tangente horizontale à droite du point $A(0;3)$ et $(C_{f^{-1}})$ admet une demi- tangente verticale dirigée vers le haut à gauche du point $A'(3;0)$

donc f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 3.

c) $(f^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\alpha))} = \dfrac{1}{f'(\alpha)}$ (car $f(\alpha) = \alpha$)

On a : $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(\alpha+1)^2}} - 1$

Et $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\alpha+1} - \alpha = \alpha$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha+1} = \frac{2\alpha}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(\alpha+1)^2} = \frac{4\alpha^2}{9}$$

D'où : $f'(\alpha) = \dfrac{9}{4\alpha^2} - 1$

Donc : $(f^{-1})'(\alpha) = \dfrac{4\alpha^2}{9 - 4\alpha^2}$

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x-\arctan x}$

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^+$.

2) a- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $x-\frac{x^3}{3}\leq\arctan x\leq x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$

b- Étudier la dérivabilité de f à droite de 0, puis donner une interprétation géométrique

3) Donner le tableau de variation f.

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

CORRECTION

$f(x)=\sqrt[3]{x-\arctan x}$

1/ $x\in D_f \Leftrightarrow x-\arctan x\geq 0$

Soit g la fonction définie par : $g(x)=x-\arctan x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(\forall x\in\mathbb{R})\, g'(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\geq 0$ alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $x\geq 0\Rightarrow g(x)\geq g(0)$

$\Rightarrow g(x)\geq 0$

$x\leq 0\Rightarrow g(x)\leq g(0)$

$\Rightarrow g(x)\leq 0$

Tableau se signe de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Donc $D_f=[0;+\infty[=\mathbb{R}^+$ $D_f=[0,+\infty[=\mathbb{R}^+$

2/ a) On pose $h(x)=\arctan x-x+\frac{x^3}{3}$

Pour tout $(x\in\mathbb{R}^+)$: $h'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2$

Donc : $h'(x)=\frac{x^4}{1+x^2}\geq 0$

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,h(x)\geq h(0)$ et comme $h(0)=0$ alors : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,h(x)\geq 0$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ x-\frac{x^3}{3}\le \arctan x$

De même, on étudie la fonction : $\left(x\mapsto x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\arctan x\right)$ et on déduit que :

$(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \arctan x\le x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$

b) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x-\arctan x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{x-\arctan x}{x^3}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

en effet pour tout $x\in]0,1]$

$x-\frac{x^3}{3}\le\arctan x\le x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$

Et $\frac{1}{3}-\frac{x^2}{5}\le\frac{x-\arctan x}{x^3}\le\frac{1}{3}$

Et comme $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{5}\right)=\frac{1}{3}$ alors : $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-\arctan x}{x^3}\right)=\frac{1}{3}$

Donc : $\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt[3]{\frac{x-\arctan x}{x^3}}\right)=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

Alors f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

Interprétation géométrique :

(C_f) admet une demi-tangente de coefficient directeur $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ à droite du point O(0,0)

3/ $\forall x>0\ f'(x)=\frac{x^2}{3(1+x^2)\sqrt[3]{x-\arctan x}}>0$

Tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$

4/ $x\to x$ et $x\to\arctan x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}^+$; Donc :

$x\to x-\arctan x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ x-\arctan x\ge0$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$; et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

D'où : f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J tel que : $J=f(\mathbb{R}^+)=[0;+\infty[$

EXERCICE 14

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$

1) Calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$

CORRECTION

1/ f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$; On a :

$$f_n(x) = C_n^0 x + \frac{1}{2} C_n^1 x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1} C_n^n x^{n+1}$$

$$f_n'(x) = C_n^0 + C_n^1 x^1 + \cdots + C_n^n x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n$$

2) On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$

On a: $S_n = f_n(1)$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})\ f_n'(x) = (1+x)^n$

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f_n'(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} + C$

Donc : $f_n(0) = \frac{1}{n+1} + C = 0$

D'où : $C = \frac{-1}{n+1}$

Donc : $f_n(x) = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}$

Par conséquent : $f_n(1) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

Donc : $S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

TEOREME DE ROLLE –TEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS

NIVEAU 1

EXERCICE 15

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que :

$(\forall x \in]a,b[) : \ f'(x) \neq 0$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au plus une solution dans $]a, b[$.

CORRECTION

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ tel que : $(\forall x \in]a;b[)\ f'(x) \neq 0$

Par l'absurde : supposons que $\left(\exists (\alpha;\beta) \in (]a;b[)^2\right)$ tel que : $\alpha \neq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

Supposons que : $\alpha < \beta$

On a f dérivable sur $]a;b[$ et $[\alpha;\beta] \subset]a;b[$

Alors f est dérivable sur $[\alpha;\beta]$; d'où : f est continue sur $[\alpha;\beta]$ et on a : $f(\alpha) = f(\beta)$

D'après le théorème de Rolle : $(\exists c \in]\alpha;\beta[) / f'(c) = 0$

Alors $(\exists c \in]a;b[) / f'(c) = 0$

Ce qui contredit le fait que : $(\forall x \in]a;b[)\ f'(x) \neq 0$

D'où : l'équation $f(x) = 0$ admet au plus une solution dans $]a;b[$.

NIVEAU 2

EXERCICE 24

On considère une fonction f dérivable sur $[0,1]$, telle que : $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue sur $[0,1]$

2) a- Montrer qu'il existe un réel c de $]0,1[$ tel que $cf'(c) - f(c) = 0$.

b- On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Montrer que (C) possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.

CORRECTION

1) On a f est dérivable sur $[0;1]$ donc f est continue sur $[0;1]$

Et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;1]$

Donc : g est continue sur $]0;1]$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= f'_d(0) = 0 = g(0)$$

Donc : g est continue à droite en 0

D'où : g est continue sur $[0;1]$

2) a) On a g est continue sur $[0,1]$ et f est dérivable sur $]0,1[$; $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,1[$. Alors g est dérivable sur $]0,1[$.

On a $g(0) = 0$ et $g(1) = f(1) = 0$ alors $g(0) = g(1)$

Donc d'après le théorème de Rolle : $(\exists c \in]0;1[) / g'(c) = 0$

On a : $(\forall x \in]0;1[) / g'(x) = \dfrac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$

Donc : $(\exists c \in]0;1[) / \dfrac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$

D'où : $(\exists c \in]0;1[) / cf'(c) - f(c) = 0$

b) d'après la question a) : $(\exists c \in]0;1[) / cf'(c) - f(c) = 0$

L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse c est :

$$(T_c): y = f'(c)(x-c)+f(c)$$
$$= f'(c)\times x - \underbrace{cf'(c)+f(c)}_{0}$$

Donc : $(T_c): y = f'(c).x$ et $O(0;0)\in(T_c)$

D'où il existe une tangente (T_c) à la courbe (C) passant par l'origine.

EXERCICE 25

On considère une fonction f dérivable sur $[0,1]$ et positive strictement sur $]0,1[$ et $f(0)=0$

Montrer que $(\exists c\in]0,1[)$: $\dfrac{2f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

CORRECTION

On considère une fonction f dérivable sur $[0;1]$ et positive sur $]0;1[$ et $f(0)=0$

Montrons que : $(\exists c\in]0;1[)/\dfrac{2f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

Càd : $(\exists c\in]0;1[)/$
$2f'(c)\times f(1-c)-f(c)\times f'(1-c)=0$

On pose : $g(x)=f^2(x)\times f(1-x)$

On a : $g(0)=f^2(0)\times f(1)=0$

Et $g(1)=f^2(1)\times f(0)=0$

Donc : $g(1)=g(0)=0$

f est continue sur $[0;1]$ et f^2 est continue sur $[0;1]$

La fonction $h: x\mapsto 1-x$ est dérivable sur $[0;1]$; $h([0;1])\subset[0;1]$

Alors $f\circ h$ est dérivable sur $[0;1]$

Et par conséquent g est dérivable sur $[0;1]$

Donc : g est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ alors d'après le théorème de Rolle :

$(\exists c\in]0;1[)/g'(c)=0$

On a : $(\forall x\in]0;1[)$: $g'(x)=2f(x)f'(x)f(1-x)-f^2(x)f'(1-x)$
$$= f(x)[2f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)]$$

D'où : $g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)[2f'(c)f(1-c)-f(c)f'(1-c)]=0$
$$\Leftrightarrow 2f'(c)f(1-c)-f(c)f'(1-c)=0\ (car\ f(c)>0)$$

Donc : $(\exists c\in]0;1[)/\dfrac{2f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sin x - x^2$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

2) en déduire que l'équation $\cos x - 2x = 0$ admet au moins une solution dans IR.

CORRECTION

1) $(\forall x \in IR): f(x)=\sin x - x^2$

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto -x^2$ sont continues sur IR, et en particulier sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

Alors f est continue sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, et on a : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{8\sqrt{2}-\pi^2}{16}$

Donc $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$ $\left(\pi^2 \simeq 9,8 \text{ et } 8\sqrt{2}\simeq 11,3\right)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi^2}{4}=\frac{4-\pi^2}{4}$

Donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$; alors $f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Et d'après le théorème des valeurs Intermédiaires : $\left(\exists c \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right): f(c)=0$

Donc : l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto -x^2$ sont continues et dérivables sur IR, donc f est continue et dérivable sur IR.

D'où : f est continue sur $[0;c]$ et dérivable sur $]0;c[$.

De plus $f(0)=f(c)=0$

Donc d'après le théorème de Rolle : $(\exists \alpha \in]0;c[): f'(c)=0$

D'où : $(\exists \alpha \in]0;c[): \cos c - 2c = 0$

Alors l'équation $\cos x - 2x = 0$ admet au moins une solution dans IR.

EXERCICE 27

soit f la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sin x$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$.

2) En déduire que pour tout x de $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$: $|f(x)-\alpha| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

CORRECTION

1) Soit $g(x)=f(x)-x$

Les fonctions f et $x \mapsto -x$ sont continues et dérivables sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ donc g est continue sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$.

Et pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $g'(x) = f'(x) - 1 = -\cos x - 1$

D'où : $g'(x) = -(1+\cos x)$

$\cos x \geq -1$, donc $1+\cos x \geq 0$

D'où : $g'(x) \leq 0$

Alors g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$; de plus : $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$

$\pi > \frac{3}{2}$, donc $\frac{\pi}{3} > \frac{1}{2}$, d'où $g\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -1$, alors : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

Donc : $g\left(\frac{\pi}{6}\right) \times g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$

d'où : l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$

2) On a f est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x) = -\cos x$

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ et $x \mapsto \cos x$ est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\frac{\pi}{2} \leq \cos x \leq \cos\frac{\pi}{6}$

D'où : $0 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq f'(x) \leq 0$

Donc : $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a alors : f est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

Et $\left(\forall x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\right)$, $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall (x;y) \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]^2 : |f(x) - f(y)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|x-y|$

Et comme $f(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

Alors $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\right) : |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

D'où : $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\right) : |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

EXERCICE 28

Soit f et g deux fonctions continues sur un

Intervalle $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telle que : $(\forall x \in]a,b[)$: $g'(x) \neq 0$

1) Montrer que : $g(a) \neq g(b)$

2) Montrer que : $(\exists c \in]a;b[)$; $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

3) On suppose que : $f(a) = g(a) = 0$

Montrer que : $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

4) En déduire : $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} \dfrac{\text{Arctan}x - \frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$

CORRECTION

1) Montrons que $g(a) \neq g(b)$

Par l'absurde, supposons que $g(a) = g(b)$

Et comme g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors d'après le théorème de Rolle :

$\exists c \in]a;b[: g'(c) = 0$ ce qui contredit le fait que $\forall x \in]a;b[: g'(x) \neq 0$ donc : $g(a) \neq g(b)$

2) Montrons que :$(\exists c \in]a;b[)$;$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Considérons la fonction h définie sur $[a;b]$ par : $h(t) = (f(b)-f(a))g(t) - (g(b)-g(a))f(t)$

On a : f et g sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$.

Alors h est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

Et on a : $h(a) = (f(b)-f(a))g(a) - (g(b)-g(a))f(a)$

$= f(b)g(a) - f(a)g(b)$

Et $h(b) = (f(b)-f(a))g(b) - (g(b)-g(a))f(b)$

$= -f(a)g(b) + g(a)f(b)$

Donc : $h(a) = h(b)$

Et d'après le théorème de Rolle, on a :$(\exists c \in]a;b[) : h'(c) = 0$

D'où $\exists c \in]a;b[$:

$(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$

Et comme $g(a) \neq g(b)$ et $g'(c) \neq 0$

Alors : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

3) On suppose que $f(a) = g(a) = 0$

Montrons que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

D'après la question (2), on a : $\exists c\in]a;b[: \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Et comme $f(a)=g(a)=0$, alors : $\exists c\in]a;b[: \dfrac{f(b)}{g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Soit $x\in]a;b[$, alors f et g sont continues sur $[a;x]$ et dérivables sur $]a;x[$

Et $\forall t\in]a;x[: g'(t)\neq 0$

Donc $\exists c_x\in]a,x[: \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$

$a<c_x<x$, donc quand $x\to a^+$, on a : $c_x\to a^+$, alors :

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c_x\to a^+}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

$$=\lim_{t\to a^+}\frac{f'(t)}{g'(t)}\quad (t=c_x)$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

4) • Calculons $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{\mathrm{Arctan}x-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$

Soient $f(x)=\arctan x-\dfrac{\pi}{3}$ et $g(x)=x-\sqrt{3}$

On a f et g sont continues et dérivables sur IR, pour tout $x\in IR : f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Et $g'(x)=1$

donc : $(\forall x\in IR) : g'(x)\neq 0$

Et on a $f(\sqrt{3})=g(\sqrt{3})=0$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

D'où : $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{4}$

• Calculons $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}$

Soient $f(x)=\tan x-x$ et $g(x)=x^3$

On a f et g sont continues et dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc f et g sont continues sur

$\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et dérivables sur $\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$ et $\forall x\in\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[; f'(x)=\tan^2 x$ et $g'(x)=3x^2$,

donc $\forall x\in\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[; g'(x)\neq 0$ et on a : $f(0)=g(0)=0$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

D'où : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^2 x}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}$$

EXERCICE 29

Soit f une fonction deux fois dérivables sur IR telles que : $\begin{cases} f'(0)=0 \\ (\exists a>0) : f'\left(\frac{a}{2}\right) f'(a) < 0 \end{cases}$

Montrer que : $(\exists \alpha \in]0;+\infty[) : f''(\alpha)=0$

CORRECTION

On a f est deux fois dérivables sur IR, donc f' est dérivable sur IR, d'où f' est continue

Et on a : $f'\left(\frac{a}{2}\right) f'(a) < 0$

Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\left(\exists c \in \left]\frac{a}{2};a\right[\right) : f'(c)=0$

On a alors : $f'(c)=0$ et $f'(0)=0$

Donc : $f'(0)=f'(c)$

Et comme f' est continue sur $[0;c]$ et dérivable sur $]0;c[$

Alors, d'après le théorème de Rolle :$(\exists \alpha \in]0;c[)$: $(f')'(\alpha)=0$

D'où : $(\exists \alpha \in]0;+\infty[) : f''(\alpha)=0$

EXERCICE 30

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a;b]$ $(a<b)$ telles que : $f(a)=f(b)=0$ et soit $x_0 \in]a;b[$

Montrer que : $\exists c \in]a;b[$; $f''(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$

CORRECTION

$x_0 \in]a;b[$

Montrons que : $\exists c \in]a;b[$:

$$f''(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$$

On considère la fonction g définie sur $[a;b]$

Par : $g(t) = f(t) - \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}(t-a)(t-b)$

On a :$g(a) = f(a) - \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)} \times 0 = f(a)$

Et $g(b)=f(b)$

Et comme $f(a)=f(b)=0$

Alors $g(a)=g(b)=0$

Et $g(x_0)=f(x_0)-f(x_0)=0$

Alors $g(a)=g(x_0)=0$

Et on a f et $t\mapsto(t-a)(t-b)$ sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$

Alors g est continue sur $[a;b]$ et dérivable

Sur $]a;b[$, ainsi g est continue sur $[a;x_0]$ et sur $[x_0;b]$, et g est dérivable sur $]a;x_0[$ et sur $]x_0;b[$

Et d'après le théorème de Rolle : $(\exists\alpha\in]a;x_0[):g'(\alpha)=0$;$(\exists\beta\in]x_0;b[):g'(\beta)=0$

EXERCICE 31

Soit f la fonction définie par : $f(x)=2x+\sqrt{1-x^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1.

b- Interpréter géométriquement les résultats précédents.

Correction

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,1-x^2\geq 0\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2\leq 1\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\leq x\leq 1\}$

Donc $D_f=[-1;1]$

2) a- et b- • Calculons $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+\sqrt{1-x^2}+2}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}+2(x+1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}\right)\sqrt{1+x}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1+x}}\begin{array}{l}\nearrow\ \sqrt{2}\\ \searrow\ 0^+\end{array}$

Donc $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$

Par suite f n'est pas dérivable à droite en -1 et C_f admet une demi-tangente
verticale dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse -1

- Calculons $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x+\sqrt{1-x^2}-2}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}+2(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\left(\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}\right)\sqrt{1-x}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\left(\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}} \begin{matrix} \nearrow \sqrt{2} \\ \searrow 0^+ \end{matrix}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Par suite f n'est pas dérivable à gauche en 1 et C_f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à gauche du point d'abscisse 1.

EXERCICE 32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2} \ ; x \geq 0 \\ f(x) = 4\sqrt{1-x}+x-4 \ ; x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

2) Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$, puis donner une interprétation géométrique des résultats trouvés.

Correction

1) On a : $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2}$; $x \geq 0$; donc $f(0) = 0$

Et $f(x) = 4\sqrt{1-x}+x-4$; $x < 0$; calculons $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 4\sqrt{1-x}+x-4 = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

Par suite f est continue en 0.

2) • Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3} \times \sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x \times \sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)} = +\infty$$

Par suite f n'est pas dérivable à droite en 0 et C_f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse 0

• Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4\sqrt{1-x}+x-4}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{4\sqrt{1-x}-4}{x}+1\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{4\left(\sqrt{1-x}-1\right)}{x}+1\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{4\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}+1\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-4}{\left(\sqrt{1-x}+1\right)}+1 = -1$$

Par suite f est dérivable à gauche en 0 ; $f_g'(0)=-1$ et C_f admet une demi-tangente de coefficient directeur -1 à gauche du point d'abscisse 0

EXERCICE 3

Calculer $f'(x)$ pour tout x de I dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=(x^2-5x+1)\sqrt{x}$; $I=]0,+\infty[$

2) $f(x)=(x^2+x+1)^{\frac{3}{4}}$; $I=IR$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; $I=]1,+\infty[$

4) $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}$; $I=]1,+\infty[$

5) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-1}$; $I=]1,+\infty[$

6) $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^2+3}$; $I=IR$

7) $f(x)=\sin^3(x^2-x)$; $I=IR$

8) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x^2+3)^{\frac{1}{3}}$; $I=]1,+\infty[$

Correction

1) $f(x)=(x^2-5x+1)\sqrt{x}$; $I=]0,+\infty[$

f est dérivable sur $I=]0,+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $I=]0,+\infty[$ est de la forme $u\times v$ où $u(x)=(x^2-5x+1)\Rightarrow u'(x)=2x-5$ et $v(x)=\sqrt{x}\Rightarrow v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x)=u'\times v+u\times v'$

$$=(2x-5)\times\sqrt{x}+(x^2-5x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}\times(2x-5)\times\sqrt{x}+(x^2-5x+1)}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2(2x-5)\times x+(x^2-5x+1)}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{4x^2-10x+x^2-5x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{5x^2-15x+1}{2\sqrt{x}}$$

D'où : $f'(x)==\dfrac{5x^2-15x+1}{2\sqrt{x}}$; pour tout $x\in]0,+\infty[$

2) $f(x)=(x^2+x+1)^{\frac{3}{4}}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est le composé de la fonction $x \mapsto (x^2+x+1)^3$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[4]{X}$ où $X = x^2+x+1>0$; $\forall x \in \mathbb{R}$; et elle est dérivable sur $I =]0,+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $I =]0,+\infty[$.

On a : d'après la formule de la dérivée d'une fonction composée $\forall x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3}{4}(x^2+x+1)'(x^2+x+1)^{\frac{3}{4}-1}$$

$$= \frac{3}{4}(2x+1)(x^2+x+1)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2x+1}{\sqrt[4]{x^2+x+1}}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $f'(x) = \frac{3}{4} \times \frac{2x+1}{\sqrt[4]{x^2+x+1}}$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; $I =]1,+\infty[$

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}+1$ et $x \mapsto \sqrt{x}-1$ sont continues et dérivables sur $I =]1,+\infty[$; de plus $x \mapsto \sqrt{x}-1$ ne s'annule pas sur $I =]1,+\infty[$; donc f est dérivable sur $I =]1,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables et on a pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)'\left(\sqrt{x}-1\right) - \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)'}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) - \left(\sqrt{x}+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

Donc $(\forall x \in]1,+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+4x-5}$; $I =]1,+\infty[$

On a $x^2+4x-5>0$ pour tout $x \in]1,+\infty[$ (en étudiant le signe de x^2+4x-5)

Donc f est définie dérivable sur $I =]1,+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $I =]1,+\infty[$ ($x \mapsto x^2+4x-5$ et $X \mapsto \sqrt{X}$) et on a pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{x^2+4x-5}\right)' \\ &= \frac{\left(x^2+4x-5\right)'}{2\sqrt{x^2+4x-5}} \\ &= \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x-5}} \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}} \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]1,+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2-1}$; $I =]1,+\infty[$

On a $x^3+3x^2-1>0$ pour tout $x \in]1,+\infty[$ (en mettant x^3+3x^2-1 sous la forme :

$x^3+3x^2-1 = x^3-1+3x^2 = (x-1)\left(x^2+3x+1\right)+3x^2$)

Donc f est définie dérivable sur $I =]1,+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $I =]1,+\infty[$ ($x \mapsto x^3+3x^2-1$ et $X \mapsto \sqrt[3]{X}$) et on a pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2-1}\right)' \\ &= \left(\left(x^3+3x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\right)' \\ &= \frac{1}{3}\times\left(x^3+3x^2-1\right)'\times\left(x^3+3x^2-1\right)^{\frac{1}{3}-1} \\ &= \frac{1}{3}\times\left(3x^2+6x\right)\times\left(x^3+3x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2-1\right)^2}} \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]1,+\infty[)$; $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2-1\right)^2}}$

6) $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^2+3}$; $I=\mathbb{R}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est le composé de la fonction $x\mapsto x^4+x^2+3$ et la fonction $x\mapsto \sqrt[4]{X}$ où $X=x^4+x^2+3>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$; et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\sqrt[4]{x^4+x^2+3}\right)'$$
$$=\left(\left(x^4+x^2+3\right)^{\frac{1}{4}}\right)'$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(x^4+x^2+3\right)'\times\left(x^4+x^2+3\right)^{\frac{1}{4}-1}$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(4x^3+2x\right)\times\left(x^4+x^2+3\right)^{-\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{2x^3+x}{2\sqrt[4]{\left(x^4+x^2+3\right)^3}}$$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\dfrac{2x^3+x}{2\sqrt[4]{\left(x^4+x^2+3\right)^3}}$

7) $f(x)=\sin^3(x^2-x)$; $I=\mathbb{R}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est le composé de la fonction $x\mapsto x^2-x$ et la fonction $x\mapsto \sin^3 X$; et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\sin^3(x^2-x)\right)'$$
$$=3\left(\sin(x^2-x)\right)'\left(\sin^{3-1}(x^2-x)\right)$$
$$=3(x^2-x)'\times\cos(x^2-x)\left(\sin^2(x^2-x)\right)$$
$$=3(2x-1)\times\cos(x^2-x)\sin^2(x^2-x)$$
$$=\frac{3(2x-1)\sin^2\left(2\left(x^2-x\right)\right)}{4}$$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\dfrac{3(2x-1)\sin^2\left(2\left(x^2-x\right)\right)}{4}$

8) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}$; $I=]1,+\infty[$

f est dérivable sur $I=]1,+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables ($x\mapsto\dfrac{x}{x-1}$ car $x-1$ ne s'annule pas sur $I=]1,+\infty[$ et $x\mapsto\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}$ car $x^2+3>0$ sur $I=]1,+\infty[$)

$$\text{et on a pour tout } x \in \left]1,+\infty\right[\; : \; f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$= \left(\frac{x}{x-1}\right)'\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$= \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(x^2+3\right)'\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{x^2+3}}{(x-1)^2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^2}}\left(\frac{2x^2}{x-1}\right)$$

$$= \frac{-3\sqrt[3]{x^2+3}\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^2} + 2x^2(x-1)}{3\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^2}\,(x-1)^2}$$

$$= \frac{-3\left(x^2+3\right)+2x^3-2x^2}{3\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^2}\,(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3-5x^2-9}{3\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^2}\,(x-1)^2}$$

$$\text{Donc } \left(\forall x \in \left]1,+\infty\right[\right) \; ; \; f'(x) = \frac{2x^3-5x^2-9}{3\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^2}\,(x-1)^2}$$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$ et donner une interprétation géométrique.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction

1) Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\text{On a : } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or pour tout $x \neq 0$; on a : $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

D'où par encadrement on déduit que : $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Par suite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$; donc f est dérivable en $x=0$ et $f'(0)=0$; la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

2) la fonction $x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$; donc f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$; de plus f est dérivable en $x=0$; par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a : $f'(x) = \left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$$

Or $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)'\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}\times\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-1}{x^2}\times\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'où $\begin{cases} f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ;\text{si } x \neq 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Donner le tableau de variation de f.

Correction

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 2\right)'$

$$= 3x^2 - 6x + 3$$
$$= 3\left(x^2 - 2x + 1\right)$$
$$= 3(x-1)^2$$

D'où : $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{10-x}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que : $(\forall x\in]0;10[)$; $f'(x)=\dfrac{\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}$

3) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

4) En déduire une comparaison des nombres $A=\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$ et $B=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{7}$.

Correction

1) $D_f=\{x\in IR \,/\, x\geq 0 \text{ et } 10-x\geq 0\}$

$\quad =\{x\in IR \,/\, x\geq 0 \text{ et } x\leq 10\}$

$\quad =[0;10]$

2) Pour tout $x\in]0;10[$; $f'(x)=\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{10-x}\right)'$

$$=\left(x^{\frac{1}{4}}+(10-x)^{\frac{1}{4}}\right)'$$

$$=\frac{1}{4}\times x^{\frac{1}{4}-1}+\frac{1}{4}\times(10-x)'\times(10-x)^{\frac{1}{4}-1}$$

$$=\frac{1}{4}\times x^{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{4}\times(10-x)^{-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{(10-x)^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{x^3}\sqrt[4]{(10-x)^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}$$

Donc : $(\forall x\in]0;10[)$; $f'(x)=\dfrac{\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}$

3) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}$; on a :

- $\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}\geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{(10-x)^3}\geq \sqrt[4]{x^3}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (10-x)^{\frac{3}{4}}\geq x^{\frac{3}{4}}\\ &\Rightarrow 10-x\geq x\\ &\Rightarrow 2x\leq 10\\ &\Rightarrow x\leq 5\end{aligned}$$

D'où $f'(x)\geq 0$; sur $]0;5]$

- $\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}\leq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{(10-x)^3}\leq \sqrt[4]{x^3}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (10-x)^{\frac{3}{4}}\leq x^{\frac{3}{4}}\\ &\Rightarrow 10-x\leq x\\ &\Rightarrow 2x\geq 10\\ &\Rightarrow x\geq 5\end{aligned}$$

D'où $f'(x)\geq 0$; sur $[5;10[$

4) on a : $2\in]0;5]$ et $3\in]0;5]$; de plus f est croissante sur $]0;5]$; alors

$2\leq 3\Rightarrow f(2)\leq f(3)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{10-2}\leq \sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{10-3}\\ &\Rightarrow \sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\leq \sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{7}\end{aligned}$$

Axe de symétrie – Centre de symétrie
Point d'inflexion

⊙ Axe de symétrie

La droite d'équation $y=a$ est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction f si et seulement si :

- $\forall x\in D_f$ alors $(2a-x)\in D_f$
- $\forall x\in D_f$ $f(2a-x)=f(x)$

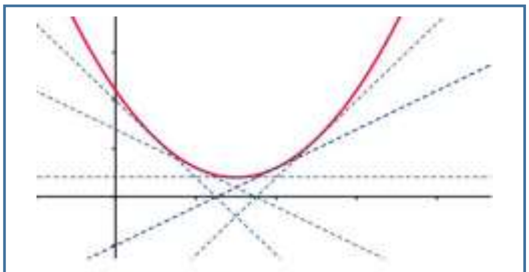
⊙ Centre de symétrie

Le point $I(a\,;b)$ est un centre de symétrie de la courbe d'une fonction f si et seulement si :

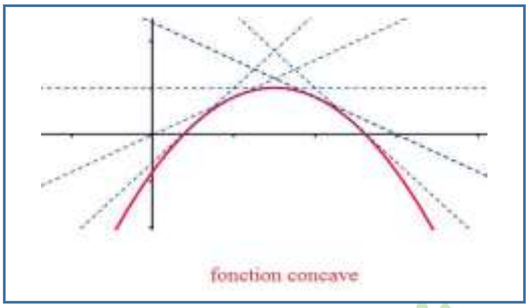
- $\forall x\in D_f$ alors $(2a-x)\in D_f$
- $\forall x\in D_f$ $f(2a-x)+f(x)=b$

⊙ Convexité et concavité – point d'inflexion

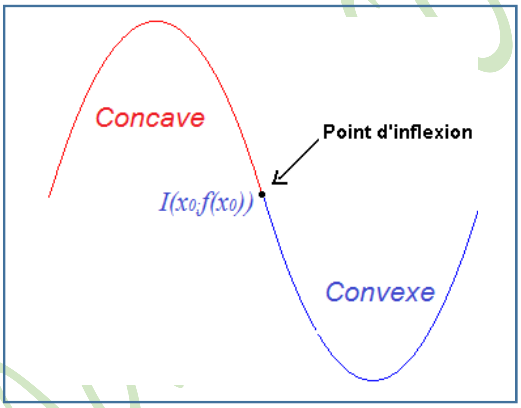
Une courbe de fonction est convexe sur un intervalle I si elle est au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle
Si on a : $f''(x)\geq 0$ $(\forall x\in I)$ Alors la courbe de f est convexe sur I


fonction convexe

Une courbe de fonction est concave sur un intervalle I si elle est au-dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle	
Si on a : $f''(x) \leq 0 \quad (\forall x \in I)$ Alors la courbe de f est concave sur I	



Un point $I(x_0;f(x_0))$ est un point d'inflexion si la courbe change de concavité en ce point	
Si f'' s'annule au point x_0 en changeant de signe alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0.	
Si f' s'annule au point x_0 sans changer de signe alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0.	



www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com
whatsapp : 0711746713

BRANCHES INFINIES ET INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ → (C_f) admet Une asymptote horizontale d'équation $y=a$ au voisinage de ∞

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$ → (C_f) admet Une asymptote oblique D'équation $y = ax + b$ au voisinage de ∞
  - $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a(a \neq 0)$
    - $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] = b$ → (C_f) admet Une asymptote oblique D'équation $y = ax + b$ au voisinage de ∞
    - $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] = \infty$ → (C_f) admet Une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de ∞
  - $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \infty$ → (C_f) admet Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞
  - $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ → (C_f) admet Une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ → (C_f) admet Une asymptote verticale d'équation $x=a$

La fonction réciproque

■ Propriété

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J = f(I)$
Cette fonction est notée : $f^{-1} : x \mapsto f^{-1}(x)$

■ Résultats

- $\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J = f(I) \end{cases}$

- $\forall x \in I \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x$
- $\forall y \in f(I) \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y$

■ Déterminer l'expression de la fonction inverse

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x un élément de $f(I)$ et y un élément de I
En utilisant l'équivalence : $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$; en cherchons y en fonction de x ;on déduit l'expression de f^{-1} pour tout x de $f(I)$

■ Continuité de la fonction réciproque

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$

■ **Dérivée de la fonction réciproque**

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I ; donc elle admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J = f(I)$; et on a :

$(\forall x \in J)$; $f \circ f^{-1}(x) = x$

D'où : $(\forall x \in J)$; $(f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$

Donc si $(\forall x \in J)$; $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$; alors f^{-1} est dérivable sur J et $(\forall x \in J)$;

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

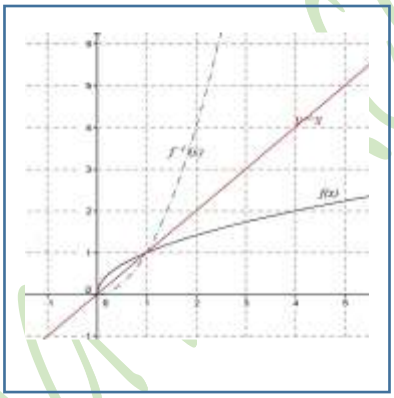
Et si en $x_0 \in J$; $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$; alors f^{-1} est dérivable en x_0 et $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

■ Dérivabilité de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} a le même sens de variation sur $f(I)$ que f

■ Représentation graphique de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; les courbes de la fonction f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la 1ére bissectrice.



Exemple :

Soir f la fonction définie sur IR^+ par : $f(x)=x^2$

On sait que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur IR^+ par : $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

Et $f'(x)=2x$ donc $f'\left(\sqrt{x}\right)=2\sqrt{x}$

Alors $f'\left(\sqrt{x}\right)\neq 0$ pour tout $x\in IR^{*+}$

Par suite f^{-1} est dérivable sur IR^{*+} et on a : $\left(\forall x\in IR^{*+}\right)$; $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Et on retrouve la formule de dérivation pour tout $x\in IR^{*+}$: $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Fonction racine niéme n∈ IN

■ Propriétés et définition

La fonction : $x\mapsto x^n$ définie sur $\mathbf{IR}^+$ admet une fonction réciproque qu'on appelle fonction racine niéme ; on la note : $\sqrt[n]{x}$

$$\sqrt[n]{x}:\begin{array}{l} IR^+\to IR^+\\ x\mapsto \sqrt[n]{x}\end{array}$$

$\forall(x;y)\in IR^2$ $\qquad \sqrt[n]{x}=y \Leftrightarrow x=y^n$

■ Cas particuliers

- $\sqrt{x}=\sqrt[2]{x}$
- le nombre $\sqrt[3]{x}$ s'appelle la racine cubique de x.

■ Propriétés

$\forall(x;y)\in IR_+^2$ $\qquad \forall n\in IN^*$

$\sqrt[n]{x^n}=x$

$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$

$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x=y$

$\sqrt[n]{x}>\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x>y$

$\forall(x;y)\in IR_+^2$ $\qquad \forall(n;m)\in\left(IN^*\right)^2$

$\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\times y}$

$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$

$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ $\qquad (y\neq 0)$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\times m]{x}$

■ Egalités importantes

$$\left\langle \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}} \quad \middle| \quad \sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right\rangle$$

■ Domaine de définition

f définie comme suit	Domaine de définition de f
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$D_f=[0;+\infty[$
$f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$	$D_f=\{x\in IR \,/\, x\in D_u \quad et \quad u(x)\geq 0\}$

■ Les limites

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$
$l\geq 0$
$+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$\sqrt[n]{l}$
$+\infty$

Ces limites restent valables en x_0 à droite ou à gauche et en $\pm\infty$

■ Continuité

La fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est continue sur IR^+

Soit u une fonction définie sur l'intervalle I

Si u est positive et continue sur l'intervalle I Alors la fonction $x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$

Est continue sur l'intervalle I.

■ Dérivabilité

La fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a :

$$\forall x\in]0;+\infty[\qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Soit u une fonction définie sur l'intervalle I

Si u est positive et dérivable sur l'intervalle I Alors la fonction $x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$

est dérivable sur l'intervalle I.

et on a : $\forall x\in]0;+\infty[\qquad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\dfrac{(u(x))'}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

■ Résolution de l'équation $[x^n=a \quad (x\in IR) \;\; et \;\; (a\in IR)]$

	n est impair	n est pair
$a>0$	$S=\{\sqrt[n]{a}\}$	$S=\{-\sqrt[n]{a};\sqrt[n]{a}\}$
$a=0$	$S=\{0\}$	$S=\{0\}$
$a<0$	$S=\{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\}$	$S=\varnothing$

■ *Puissance rationnelles d'un réel positif*

Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul tel que : $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in]0;+\infty[\ x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

■ *Remarques importantes*

- $\forall x \in]0;+\infty[\qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- Le domaine de définition de la fonction : $x \mapsto (u(x))^r \quad (r \in \mathbb{Q}^*)$ est :

$D = \{x \in IR / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$

- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = n \times (u(x))' \times (u(x))^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous x et y de IR_+^* et r ; r' de Q^*

- $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$ • $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ • $(x \times y)^r = x^r \times y^r$

- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$ • $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ • $\frac{1}{x^{r'}} = x^{-r'}$

4. comment interpréter graphiquement une limite

Méthode

On l'interprète en termes d'asymptote

■ Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ou $a \in IR$, alors on conclut que : C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

■ Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, ou $b \in IR$, alors on conclut que : C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ au voisinage de $\mp\infty$.

■ Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - y = 0$ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - y = 0$ avec $y = ax + b$, alors C_f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\mp\infty$.

Exemple

Calculer les limites suivantes et donnez-en une interprétation graphique:

a) $\lim_{x \to -2^-} \frac{x+5-x^2}{2+x}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^2+5}{-1+5x-x^2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) + (4x+1)$ où $f(x) = -\frac{4x^2+9x+5}{x+2}$.

Solution

a) Pour $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x+5-x^2}{2+x}$

On a $\lim\limits_{x\to-2^-} x+5-x^2=-1$ (car le polynôme $x+5-x^2$ est continue en -2).

Et $\lim\limits_{x\to-2^-} 2+x=0^-$ (car $x<-2$).

Donc en appliquant les règles de quotient des limites ; on obtient : $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x+5-x^2}{2+x}=+\infty$

Interprétation géométrique :

C_f admet $-\infty$ la droite d'équation $x=-2$ comme asymptote verticale.

b) Pour $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^2+5}{-1+5x-x^2}$

En utilise la règle du plus haut degré ; on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^2+5}{-1+5x-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^2}{-x^2}=4$

Interprétation géométrique :

C_f admet au voisinage de$-\infty$ la droite d'équation $y=4$ comme asymptote horizontale.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+(4x+1)$ où $f(x)=-\dfrac{4x^2+9x+5}{x+2}$.

pour calculer cette limite il suffit de trouver une expression simplifier de

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+(4x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{4x^2+9x+5}{x+2}+(4x+1)$

On peut d'abord montrer que : $f(x)=-\dfrac{4x^2+9x+5}{x+2}=-(4x+1)-\dfrac{3}{x+2}$ par une division euclidienne de $4x^2+9x+5$ par $x+2$; on obtient :

$f(x)+(4x+1)=-\dfrac{4x^2+9x+5}{x+2}=(4x+1)-(4x+1)-\dfrac{3}{x+2}=-\dfrac{3}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{3}{x+2}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+(4x+1)=0$.

Interprétation géométrique :

C_f admet une asymptote oblique d'équation $y=-(4x+1)$ au voisinage de$+\infty$.

5. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote verticale

Méthode

On choisit une valeur interdite $a\in IR$ de f (càd une valeur où f n'est pas définie) et on calcule $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour trouver $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans la plus part des cas cette limite se calculera à droite et à gauche de a .
On conclut que la droite d'equation $x=a$ est une asymptote verticale à C_f .

Exemple

Soit la fonction f definie sur $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{4-x}$

Montrer que f admet une une asymptote verticale dont on précisera une éequation.

Solution

Comme 4 annule le denominateur de $f(x)$*, on n'hésite pas : on calcule lim f(x)*

On a : $\lim\limits_{x\to4} x^2+x-6=14$ *et* $\lim\limits_{x\to4} 4-x=0$. *Donc* $\lim\limits_{x\to4} f(x)=\pm\infty$ *(celon si cette limite est à droite ou à gauche de 4.*

Interprétation géométrique *:*

Des deux deniers résultats, on déduit que la droite d'equation x = 4 est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

6. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote horizontale

Méthode

On calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ pour trouver un réel b.

On conclut alors que la droite équation $y=b$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$ ou au voisinage de $+\infty$.

Exemple

Soit $f: x\mapsto \dfrac{2+x-x^2}{3x^2+7}$ *définie sur IR.*

Montrer que C_f *la courbe représentative de f, admet en* $-\infty$ *une asymptote dont on précisera une équation.*

Solution

En utilise la règle du plus haut degré ; on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+x-x^2}{3x^2+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}}=-\frac{1}{3}$$

On peut donc conclure que C_f *admet une asymptote verticale en* $-\infty$ *d'équation* $y=-\dfrac{1}{3}$

7. Comment montrer que la courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote oblique

Méthode 2 (on nous demande d'étudier les branches infinies de la courbe de f aux voisinage de $\pm\infty$)

On trouve $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$.

On calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; on a trois cas possibles :

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$; alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses aux voisinage de $\pm\infty$)
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$; alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées aux voisinage de $\pm\infty$)
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$; alors on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$; on a deux cas possibles :
  - ~ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$; alors (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ aux voisinage de $\pm\infty$)
  - ~ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b\in\mathbb{R}$; alors (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ aux voisinage de $\pm\infty$.

Méthode 2 (on nous donne une droite et on nous demande de montrer que cette droite est une asymptote à la courbe de f aux voisinage de $\pm\infty$)

On trouve $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$.

On montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-y=0$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=0$ avec $y=ax+b$

On conclut alors que la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ *par :* $f(x)=\dfrac{2x^2-6x+5}{x-1}$

a) *Déterminer les réels a ; b et c tels que* $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

b) En déduire que la courbe représentative C_f de f admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

<u>Solution</u>

a) Pour tout $x \neq 1$, on a : $ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1}$

$= \frac{ax^2 + (b-a)x + (c-b)}{x-1}$

En identifiant les deux expressions on obtient : $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -6 \\ c - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $f(x) = 2x - 4 + \frac{1}{x-1}$; d'où : $f(x) - (2x-4) = \frac{1}{x-1}$

Et comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$; alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (2x-4) = 0$

On conclut que C_f admet la droite(Δ) d'équation $y = 2x - 4$ comme asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$.

8. Comment étudier sur l'intervalle I la position relative de C_f et d'une droite D qui lui est asymptote

<u>Méthode</u>

On calcule $f(x) - y$; où $y = ax + b$ est une équation de la droite D.

On étudie ensuite le signe de $f(x) - y$ sur Intervalle I (à l'aide d'un tableau de signe)

On conclut que C_f est au-dessus de D sur Intervalle I si $f(x) - y \geq 0$ et que (C_f) est au-dessous de D sur l'intervalle I si $f(x) - y \leq 0$

<u>Exemple</u>

Dans l'exemple précèdent, étudier les positions relatives de (C_f) et de la droite D. d'équation $y = 2x - 4$

<u>Solution</u>

On a montré que pour $x \neq 1$, $f(x) - (2x-4) = \frac{1}{x-1}$

Etudions le signe de $f(x) - y$ avec $x \neq 1$: $f(x) - y$ est du signe de $x - 1$

Or $x - 1 > 0$ pour $x > 1$ et $x - 1 < 0$ pour $x < 1$

On peut donc dire que :

sur $]1;+\infty[$; $f(x)-y>0$

Ce qui signifie que sur l'intervalle $]1;+\infty[$; (C_f) est au-dessus de D.

Et sur $]-\infty;1[$; $f(x)-y<0$

Ce qui signifie que sur l'intervalle $]-\infty;1[$; (C_f) est au-dessous de D.

Série d'exercices corrigés étude de fonction

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=3\sqrt[3]{x+1}-x$

3) a- calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b- donner le tableau de variation de f

2) montrer qu'il existe un seul réel α de $]2,3[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

c) montrer que : $(f^{-1})'(\alpha)=\dfrac{4\alpha^2}{9-4\alpha^2}$

Exercice 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que :

$(\forall x\in]a,b[)$: $f'(x)\neq 0$

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au plus une solution dans $]a,b[$.

Exercice 3:

On considère une fonction f dérivable sur $[0,1]$ telle que : $f(0)=f'(0)=0$ et $f(1)=0$.

Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{f(x)}{x} & si\ x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue sur $[0,1]$

2) a- Montrer qu'il existe un réel c de $]0,1[$ tel que $cf'(c)-f(c)=0$.

b- On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Montrer que (C) possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.

Exercice 4:

On considère une fonction f dérivable sur $[0,1]$ et positive strictement sur $]0,1[$ et $f(0)=0$

Montrer que : $(\exists c\in]0;1[)$; $\dfrac{2f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

CORRECTION

On considère une fonction f dérivable sur $[0;1]$ et positive sur $]0;1[$ et $f(0)=0$

Montrons que : $(\exists c \in]0;1[)$; $\dfrac{2f'(c)}{f(c)} = \dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

Càd : $(\exists c \in]0;1[)$; $2f'(c)\times f(1-c) - f(c)\times f'(1-c) = 0$

On pose : $g(x) = f^2(x)\times f(1-x)$

On a : $g(0) = f^2(0)\times f(1) = 0$

Et $g(1) = f^2(1)\times f(0) = 0$

Donc : $g(1) = g(0) = 0$

f est continue sur $[0;1]$ et f^2 est continue sur $[0;1]$

La fonction $h : x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $[0;1]$

$h([0;1]) \subset [0;1]$

Alors $f \circ h$ est dérivable sur $[0;1]$

Et par conséquent g est dérivable sur $[0;1]$

Donc : g est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ alors d'après le théorème de Rolle :

$(\exists c \in]0;1[) / g'(c) = 0$

On a : $(\forall x \in]0;1[)$

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)f(1-x) - f^2(x)f'(1-x)$$
$$= f(x)\left[2f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)\right]$$

D'où : $g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)\left[2f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c)\right] = 0$

$\Leftrightarrow 2f'(c)f(1-c) - f(c)f'(1-c) = 0$ $\quad (\text{car } f(c) > 0)$

Donc : $(\exists c \in]0;1[) / \dfrac{2f'(c)}{f(c)} = \dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sin x - x^2$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution c dans $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) en déduire que l'équation $\cos x - 2x = 0$ admet au moins une solution dans IR.

CORRECTION

1) $(\forall x \in IR) : f(x) = \sin x - x^2$

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto -x^2$ sont continues sur IR, et en particulier sur $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Alors f est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et on a : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi^2}{16} = \dfrac{8\sqrt{2} - \pi^2}{16}$

Donc $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$ $\left(\pi^2 \simeq 9{,}8 \text{ et } 8\sqrt{2}\simeq 11{,}3\right)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi^2}{4}=\frac{4-\pi^2}{4}$

Donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$; alors $f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Et d'après le théorème des valeurs Intermédiaires : $\left(\exists c\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right): f(c)=0$

Donc : l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

Les fonctions $x\mapsto \sin x$ et $x\mapsto -x^2$ sont continues et dérivables sur IR, donc f est continue et dérivable sur IR.

D'où : f est continue sur $[0;c]$ et dérivable sur $]0;c[$.

De plus $f(0)=f(c)=0$

Donc d'après le théorème de Rolle :$(\exists\alpha\in]0;c[): f'(c)=0$

D'où : $(\exists\alpha\in]0;c[):\cos c-2c=0$

Alors l'équation $\cos x-2x=0$ admet au moins une solution dans IR.

EXERCICE 6

soit f la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sin x$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$.

2) En déduire que pour tout x de $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$: $|f(x)-\alpha|\le\frac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

CORRECTION

1) Soit $g(x)=f(x)-x$

Les fonctions f et $x\mapsto -x$ sont continues et dérivables sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

donc g est continue sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$.

Et pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$g'(x)=f'(x)-1=-\cos x-1$

D'où : $g'(x)=-(1+\cos x)$

$\cos x\ge -1$, donc $1+\cos x\ge 0$

D'où : $g'(x)\le 0$

Alors g est strictement décroissante sur

$\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$; de plus : $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}$

$\pi>\frac{3}{2}$, donc $\frac{\pi}{3}>\frac{1}{2}$, d'où $g\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=-1$, alors : $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Donc : $g\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$ d'où : l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$

2) On a f est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x)=-\cos x$

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ et $x\mapsto\cos x$ est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\frac{\pi}{2}\leq\cos x\leq\cos\frac{\pi}{6}$

D'où : $0\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq f'(x)\leq 0$

Donc : $|f'(x)|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a alors : f est continue et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

Et $\left(\forall x\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\right)$, $|f'(x)|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall(x;y)\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]^2 : |f(x)-f(y)|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}|x-y|$

Et comme $f(\alpha)=\alpha$ et $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

Alors $\left(\forall x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\right):|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

D'où : $\left(\forall x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\right):|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

EXERCICE 7

Soit f et g deux fonctions continues sur un
Intervalle $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telle que : $(\forall x\in]a,b[)$: $g'(x)\neq 0$

1) Montrer que : $g(a)\neq g(b)$

2) Montrer que : $\exists c\in]a;b[$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

3) On suppose que : $f(a)=g(a)=0$

Montrer que : $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

4) En déduire : $\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{\text{Arctan}x-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}$

CORRECTION

1) Montrons que $g(a)\neq g(b)$

Par l'absurde, supposons que $g(a)=g(b)$

Et comme g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors d'après le théorème de Rolle : $\exists c\in]a;b[/ g'(c)=0$

ce qui contredit le fait que $\forall x\in]a;b[: g'(x)\neq 0$

Donc : $g(a)\neq g(b)$

2) Montrons que : $\exists c\in]a;b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Considérons la fonction h définie sur $[a;b]$ par : $h(t)=(f(b)-f(a))g(t)-(g(b)-g(a))f(t)$

On a : f et g sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$.

Alors h est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

Et on a : $h(a)=(f(b)-f(a))g(a)-(g(b)-g(a))f(a)$
$=f(b)g(a)-f(a)g(b)$

Et $h(b)=(f(b)-f(a))g(b)-(g(b)-g(a))f(b)$
$=-f(a)g(b)+g(a)f(b)$

Donc : $h(a)=h(b)$

Et d'après le théorème de Rolle, on a : $\exists c\in]a;b[/ h'(c)=0$

D'où $\exists c\in]a;b[$; $(f(b)-f(a))\times g'(c)-(g(b)-g(a))\times f'(c)=0$

Et comme $g(a)\neq g(b)$ et $g'(c)\neq 0$

Alors : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

3) On suppose que $f(a)=g(a)=0$

Montrons que $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

D'après la question (2), on a : $\exists c\in]a;b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Et comme $f(a)=g(a)=0$, alors :

$\exists c\in]a;b[: \frac{f(b)}{g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

Soit $x \in]a;b[$, alors f et g sont continues sur $[a;x]$ et dérivables sur $]a;x[$

Et $\forall t \in]a;x[: g'(t) \neq 0$

Donc $\exists c_x \in]a,x[: \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$

$a < c_x < x$, donc quand $x \to a^+$, on a : $c_x \to a^+$, alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{c_x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \\ &= \lim_{t\to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad (t = c_x) \\ &= \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

4) • Calculons $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{\text{Arctan}x - \frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$

Soient $f(x) = \arctan x - \dfrac{\pi}{3}$ et $g(x) = x - \sqrt{3}$

On a f et g sont continues et dérivables sur IR, pour tout $x \in IR : f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Et $g'(x) = 1$ donc : $(\forall x \in IR) : g'(x) \neq 0$

Et on a $f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) = 0$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

D'où : $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{4}$

• Calculons $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3}$

Soient $f(x) = \tan x - x$ et $g(x) = x^3$

On a f et g sont continues et dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc f et g sont continues sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et dérivables sur $\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$ et $\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[; f'(x) = \tan^2 x$ et $g'(x) = 3x^2$,

donc $\forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[; g'(x) \neq 0$

et on a : $f(0) = g(0) = 0$, alors : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

D'où : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan^2 x}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

EXERCICE 8

Soit f une fonction deux fois dérivables sur IR telles que : $\begin{cases} f'(0)=0 \\ (\exists a>0): f'\left(\frac{a}{2}\right)f'(a)<0 \end{cases}$

Montrer que : $(\exists \alpha \in]0;+\infty[): f''(\alpha)=0$

CORRECTION

On a f est deux fois dérivables sur IR, donc f' est dérivable sur IR, d'où f' est continue

Et on a : $f'\left(\frac{a}{2}\right)f'(a)<0$

Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\left(\exists c \in \left]\frac{a}{2};a\right[\right): f'(c)=0$

On a alors : $f'(c)=0$ et $f'(0)=0$

Donc : $f'(0)=f'(c)$

Et comme f' est continue sur $[0;c]$ et dérivable sur $]0;c[$

Alors, d'après le théorème de Rolle :$(\exists \alpha \in]0;c[)$: $(f')'(\alpha)=0$

D'où : $(\exists \alpha \in]0;+\infty[): f''(\alpha)=0$

EXERCICE 9

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a;b]$ $(a<b)$ telles que : $f(a)=f(b)=0$ et soit $x_0 \in]a;b[$

Montrer que : $\exists c \in]a;b[\; / f''(c)=\frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$

CORRECTION

Soit $x_0 \in]a;b[$

Montrons que : $\exists c \in]a;b[: \; f''(c)=\frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$

On considère la fonction g définie sur $[a;b]$

Par : $g(t)=f(t)-\frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}(t-a)(t-b)$

On a :$g(a)=f(a)-\frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}\times 0=f(a)$

Et $g(b)=f(b)$

Et comme $f(a)=f(b)=0$

Alors $g(a)=g(b)=0$

Et $g(x_0)=f(x_0)-f(x_0)=0$

Alors $g(a)=g(x_0)=0$

Et on a f et $t\mapsto(t-a)(t-b)$ sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$

Alors g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, ainsi g est continue sur $[a;x_0]$

Et sur $[x_0;b]$, et g est dérivable sur $]a;x_0[$ et sur $]x_0;b[$

D'après le théorème de Rolle : $(\exists\alpha\in]a;x_0[):g'(\alpha)=0$ et $(\exists\beta\in]x_0;b[):g'(\beta)=0$

Donc : $g'(\alpha)=g'(\beta)$

Et comme g' est continue sur $[\alpha;\beta]$

Et dérivable sur $]\alpha;\beta[$

Alors d'après le théorème de Rolle : $(\exists c\in]\alpha;\beta[)/(g'(c))'=0$

D'où : $(\exists c\in]\alpha;\beta[)/g''(c)=0$

ETUDE DE FONCTION

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de IR vers un intervalle I que l'on déterminera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3) Montrer que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion de (C)

4) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à (C) en A.

5) a) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, Prouver que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a : $f(x)-1\leq x$.

b) Déduire la position relative de (C) et T.

6) Tracer la courbe (C) et la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

CORRECTION

$$f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1) a) f est dérivable sur IR ; et pour tout $x\in IR$: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\times\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$$

Donc : $(\forall x \in IR)\ f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$

b) $(\forall x \in IR)\ f'(x) > 0$ *alors f est strictement croissante sur IR*

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 2$

2) a) $x \mapsto 1+x^2$ *est une fonction continue et strictement positive sur IR ; donc*

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *est continue sur IR et* $x \mapsto x$ *continue sur IR, alors f est continue sur IR et strictement croissante sur IR.*

Donc : f est bijective de IR vers $f(IR) =]0;2[$

b) Pour tout $x \in]0;2[$ *et tout y dans IR ; on a :* $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} - \frac{1}{1+y^2} = x^2 - 2x + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + y^2 = \frac{-1}{x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{-1}{x^2 - 2x} - 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1 - 2x + x^2}{2x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{(x-1)^2}{2x - x^2}$$

On a ; $0 < x < 2$ *donc* $2x - x^2 > 0$

Et $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=x-1$

Donc : y et $(x-1)$ ont le même signe

D'où : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow |y|=\frac{|x-1|}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$\Leftrightarrow y=\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Alors : $(\forall x\in]0;2[)\ f^{-1}(x)=\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

3) Pour tout $x\in IR$ $\quad f'(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$

Donc : $f''(x)=-\frac{3}{2}\times 2x\times\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}$

$$=\frac{-3x}{\sqrt{x^2+1}^5}$$

Donc : le signe de $f''(x)$ est celui de $(-x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	

f'' s'annule et change de signe en 0 ; d'où (C_f) admet un point d'inflexion $A(0;1)$

4) L'équation de la tangente en A est : $(T): y=f'(0)\times x+f(0)$

$$=x+1$$

5) a) Soit $x\in[0;+\infty[$

- Si x=0 $\quad f(0)-1=0$

Alors l'inégalité est vérifiée

- Soit x>0

On a f est continue sur IR en particulier sur $[0;x]$ et f est dérivable sur $]0;x[$

Et $(\forall t\in[0;x])\ \ |f'(t)|\le 1$

D'après l'inégalité des accroissements finis

$|f(x)-f(0)|\le x$

Et comme $f(x)-1=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ge 0$

Alors : $f(x)-1\le x$

b) $(\forall x\in[0;+\infty[)\ f(x)\le x+1$

Alors (C_f) est au –dessous de (T) sur $[0;+\infty[$

Soit $x\in]-\infty;0]$ $f(-x)\le -x+1$ (car $-x\ge 0$)

Donc : $1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leq -x+1$

Alors : $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\geq x$

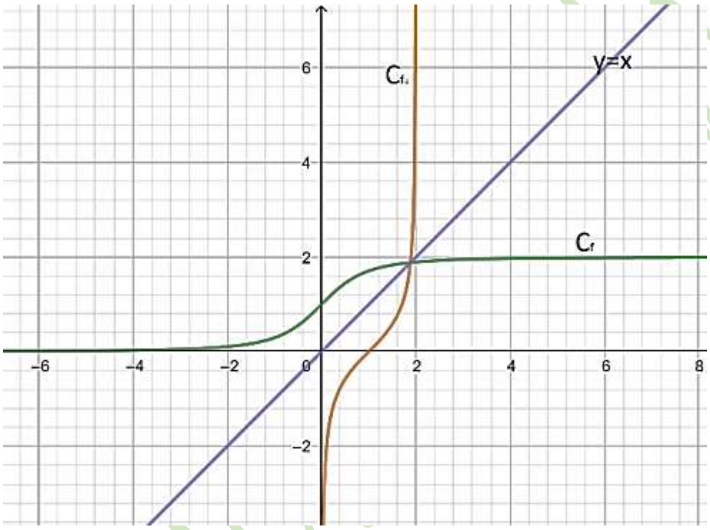
D'où : $f(x)\geq x+1$

Alors (C_f) est au-dessus de (T) sur $]-\infty;0]$

6) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

Alors (C_f) admet deux asymptotes horizontales d'équations y=2 au voisinage de $+\infty$ et y=0 au voisinage de $-\infty$

Construction de (C_f) et de $(C_{f^{-1}})$



EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a- Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

b- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

c-Déterminer les branches infinies de (C_f)

2) a- Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}}$$

b- En déduire le tableau de variation de f .

3) a- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=\frac{f'(x)}{2(1+x^2)}\left(\sqrt{1+x^2}-2x\right)$

b- En déduire la concavité de (C_f) et déterminer son point d'inflexion.

4) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$ et que : $2<\alpha<3$

5) Tracer la courbe (C_f) .

6) a- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7) Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

8) Soit φ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ par : $\varphi(x) = \frac{f(x)+1}{2} - f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{Ax^2}{8}$

Où A est le nombre réel tel que $\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

a-Montrer que : $\left(\exists a \in \left]0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\right) : \ f'(a) - f'\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{Aa}{2}$

b- Montrer que : $\left(\exists b \in \left]\frac{a}{2}, a\right[\right) : \ A = f''(b)$

CORRECTION

$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$

1) a) $x \in D_f \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$

- Si $x \geq 0$ alors $x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$
- Si x<0 alors $x + \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} > 0$ (car $-x > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$)

Donc : $D_f = IR$

b) •) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

•) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0$ (car $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$)

c) On $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation y=0 au voisinage de $-\infty$.

On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{x} \right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}}} \right) = 0$$

Donc : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) a) $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable et strictement positive sur IR ; donc : $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur IR et $x \mapsto x$ dérivable sur IR

Donc f est dérivable sur IR.

$$(\forall x \in IR)\ f'(x) = \left(\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\right)'$$

$$= \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}\times\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \frac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}} > 0 \qquad \left(\text{car } \forall u>0 : \frac{u}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}\right)$$

Donc f est strictement croissante sur IR.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

3) a) Pour tout $x \in IR$ *, on a :* $f'(x) = \dfrac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}}$

donc :

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{f'(x)\sqrt{1+x^2} - f(x)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(1+x^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{f'(x)\sqrt{1+x^2} - 2x\,f'(x)}{\left(1+x^2\right)}$$

D'où : $$f''(x) = \frac{f'(x)\left(\sqrt{1+x^2}-2x\right)}{2\left(1+x^2\right)}$$

Et comme : $\dfrac{f'(x)}{2\left(1+x^2\right)} > 0$ *alors le signe de* $f''(x)$ *est celui de* $\left(\sqrt{1+x^2}-2x\right)$

- *Si* $x \le 0$ $\sqrt{1+x^2}-2x > 0$ *alors* $f''(x) > 0$
- *Si* $x > 0$ $\sqrt{1+x^2}-2x = \dfrac{1+x^2-4x^2}{\sqrt{1+x^2}+2x}$

$$= \frac{\left(1+x\sqrt{3}\right)\left(1-x\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+x^2}+2x}$$

Donc le signe de $f''(x)$ est celui de $\left(1-x\sqrt{3}\right)$ sur $[0;+\infty[$

D'où :

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
Concavité de (C_f)	(C_f) est convexe $\qquad$ (C_f) est concave

f'' s'annule en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en changeant de signe donc $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt[4]{3}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

4) Soit $g(x)=f(x)-x$

On a f est dérivable sur IR donc continue sur IR et $x\mapsto -x$ continue sur IR

Donc g est continue et dérivable sur IR en particulier sur $[1;+\infty[$, et on a :

$(\forall x\in[1;+\infty[)\ \ g'(x)=f'(x)-1$

Donc $(\forall x\in[1;+\infty[)\ \ g''(x)=f''(x)<0$

D'où g' est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Donc : $(\forall x\geq 1)\ \ g'(x)\leq g'(1)$

D'où $(\forall x\geq 1)\ \ g'(x)\leq f'(1)-1$

On a : $f'(1)=\frac{f(1)}{2\sqrt{2}}\Rightarrow f'(1)-1=\frac{f(1)}{2\sqrt{2}}-1$

$$\Rightarrow f'(1)-1=\frac{\sqrt{2}-7}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}+2\sqrt{2}\right)}<0$$

Donc : $(\forall x\geq 1)\quad g'(x)<0$

Alors g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

D'où : g est bijective de $[1;+\infty[$ vers $g([1;+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}g(x);g(1)\right]$

$$=\left]-\infty;\sqrt{1+\sqrt{2}}-1\right]$$

(car $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)$)

Et comme $0\in\left]-\infty;\sqrt{1+\sqrt{2}}-1\right]$

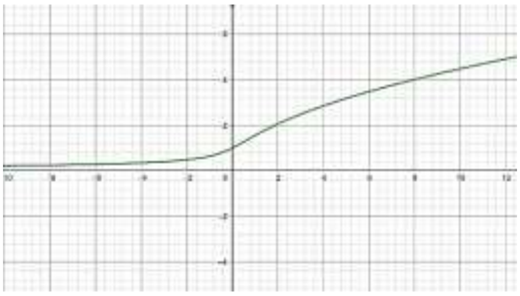
Alors l'équation $g(x)=0$ càd $f(x)=x$

Admet une solution unique α dans $[1;+\infty[$

On a $g(2)\cdot g(3)<0$ et g est continue sur $[2;3]$

Donc d'après le T.V.I on a : $2<\alpha<3$

5) Construction de (C_f)



6) $\left(\text{pour tout } x \in \left]0;+\infty\right[\right)$ et $\left(\text{pour tout } y \in IR\right)$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y+\sqrt{1+y^2}}$$

$$\Leftrightarrow y+\sqrt{1+y^2} = x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = x^2 - y$$

$$\Leftrightarrow 1+y^2 = \left(x^2-y\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+\cancel{y^2} = x^4 - 2x^2y + \cancel{y^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2y = x^4 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^4-1}{2x^2}$$

Donc : $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right) \quad f^{-1}(x) = \dfrac{x^4-1}{2x^2}$

7) $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et $\left(C_f\right)$ sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta): y = x$

8) a) φ est continue sur $\left[0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et dérivable sur $\left]0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$ et $\varphi(0) = \varphi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

donc d'après le théorème de Rolle : $\exists a \in \left]0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\ / \ \varphi'(a) = 0$

On a : $\forall x \in \left]0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$; $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}f'(x) - \dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{A}{4}x$

Donc $\varphi'(a) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}f'(a) - \dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{a}{2}\right) - \dfrac{A}{4}a = 0$

$$\Leftrightarrow f'(a) - f'\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{A}{2}a$$

b) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \dfrac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}}$ donc f' est dérivable sur IR.

Alors f' est continue sur $\left[\dfrac{a}{2};a\right]$

Et dérivable sur $\left]\dfrac{a}{2};a\right[$.

D'après le T.A.F : $\exists b \in \left]\dfrac{a}{2};a\right[\ / \ f'(a) - f'\left(\dfrac{a}{2}\right) = \left(a - \dfrac{a}{2}\right)f''(b)$

Donc $\exists b \in \left]\frac{a}{2};a\right[\; \frac{A}{2}a = \frac{a}{2} f''(b)$

Alors : $\exists b \in \left]\frac{a}{2};a\right[\; / \; A = f''(b) \quad (car\ a \neq 0)$

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 \arctan x$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) Déduire les branches infinies de (C_f)

2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$\forall x > 0 ; \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$

3) Montrer que $\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^3}\left[\arctan x - \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{x^2}{2(1+x^2)}\right]$

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Construire (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

CORRECTION

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

b) •) On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ au voisinage de $+\infty$

•) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$;donc (C_f) admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale

2) Soit x>0

On pose : $\varphi(t) = \arctan t$

On a : φ est continue et dérivable sur IR ;

Donc φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et continue sur $[0;x]$ et d'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists c \in]0;x[) / \varphi(x) - \varphi(0) = (x-0)\varphi'(c)$

C'est-à-dire : $(\exists c \in]0;x[) : \arctan x = \frac{x}{1+c^2}$

Or : $0 < c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2$

$\Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2$

$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x$

D'où : $\boxed{(\forall x > 0) \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x}$

3) Pour tout $x>0$: $f'(x)=\frac{2}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\arctan x+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$=\frac{2(x-1)}{x^3}\arctan x+\frac{x(x-1)^2}{x^3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{2(x-1)}{x^3}\left[\arctan x+\left(\frac{x(x-1)}{2(1+x^2)}\right)\right]$$

$$=\frac{2(x-1)}{x^3}\left[\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{x^2}{2(1+x^2)}\right]$$

Donc : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\frac{2(x-1)}{x^3}\left[\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{x^2}{2(1+x^2)}\right]$

Et d'après 2) on a : $(\forall x>0)$ $\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$ Donc : $(\forall x>0)$ $\arctan x>\frac{x}{1+x^2}>\frac{x}{2(1+x^2)}$

Alors $(\forall x>0)$ $\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}>0$

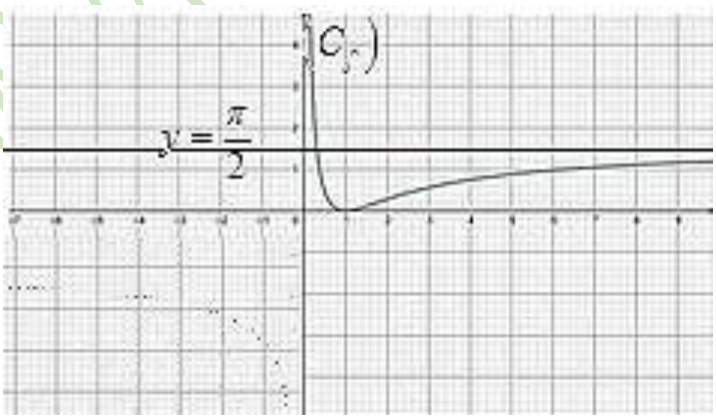
Donc $\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{x^2}{2(1+x^2)}>0$

D'où le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$ sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

5) Construction de (C_f) :



Problème 1

1ère partie :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ par : $g(x)=2-x^2\sqrt{x^2-1}$.

1- Vérifier que : $x^6-x^4-4=(x^2-2)(x^4+x^2+2)$

2- Etudier le signe de la fonction g sur $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

2ème partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $[-1;1]$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1$

1 – Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in[-1;1]$.

2- Donner le tableau de variations de f sur $[-1;1]$

3- Calculer $f(1)$, puis montrer que : $(\forall x\in[-1;1])$; $f(x)\leq 0$

3ème partie :

Soit h la fonction définie sur par : $\begin{cases} h(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}-x+1 & si \quad x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ h(x)=\sqrt{x^2+3} & si \quad x\in[-1;1] \end{cases}$

Soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 - Montrer que la fonction h est continue en 1 et -1.

2- Montrer que la courbe (C_h) admet un centre de symétrie $I(0;1)$ sur l'intervalle $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

3- a - Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$, puis montrer que la droite (D_1) d'équation $y=-x+3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$

b - En déduire par symétrie que la droite (D_2) d'équation $y=-x-1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $-\infty$

4- Etudier la dérivabilité de h en 1 à droite et interpréter le résultat géométriquement

5- a – Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

b - En déduire le signe de $h'(x)$ sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

6- a – Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in[-1;1]$.

b - En déduire le signe de $h'(x)$ sur $[-1;1]$.

7- Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.

8- Donner les équations des demi-tangentes à gauche de 1 et à droite de -1.

9- Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in[\sqrt{2};+\infty[$ / $h(\alpha)=0$ et que $2<\alpha<3$

10- Tracer (C_h) ; la droite (D_1) et la droite (D_2) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4ème partie :

Soit u la restriction de h à l'intervalle

1 - Montrer que u admet une fonction réciproque u^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2- Calculer $\left(u^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α .

Correction Problème 1

1ère partie :

$g(x)=2-x^2\sqrt{x^2-1}$; pour tous $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

1) pour tout $x\in IR$ on a : $\left(x^2-2\right)\left(x^4+x^2+2\right)=x^2\left(x^4+x^2+2\right)-2\left(x^4+x^2+2\right)$

$$=x^6+x^4+2x^2-2x^4-2x^2-4$$

$$=x^6-x^4-4$$

Donc : $\left(\forall x\in IR\right)$; $x^6-x^4-4=\left(x^2-2\right)\left(x^4+x^2+2\right)$

2) Etudions le signe de la fonction g sur $\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$; pour cela on doit définir les solutions de l'équation $g(x)=0$ puis étudier la monotonie de g sur $\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

On a pour tout $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$: • $g(x)=0\Leftrightarrow 2-x^2\sqrt{x^2-1}=0$

$$\Leftrightarrow x^2\sqrt{x^2-1}=2$$

$$\Leftrightarrow x^4\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow x^4\left(x^2-1\right)-4=0$$

$$\Leftrightarrow x^6-x^4-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\left(x^4+x^2+2\right)=0$$

(Car $x^4+x^2+2>0$) $\quad\Leftrightarrow x^2-2=0$

$$\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\quad \text{ou}\quad x=\sqrt{2}$$

• $g'(x)=\left(2-x^2\sqrt{x^2-1}\right)'$

$$=-2x\sqrt{x^2-1}-x^2\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-x\left(2\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$=-x\left(\frac{2x^2-2+x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$=-x\left(\frac{3x^2-2}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

Or pour $x<-1$ et $x>1$; $3x^2-2>0$

Donc $g'(x)$ est du signe contraire de x par suite :

• g est croissante sur $\left]-\infty;-1\right[$; et $g\left(-\sqrt{2}\right)=0$

$$Alors\ soit : x \le -\sqrt{2} \Rightarrow g(x) \le g\left(-\sqrt{2}\right)$$
$$\Rightarrow g(x) \le 0$$
$$-\sqrt{2} \le x < -1 \Rightarrow g(x) \ge g\left(-\sqrt{2}\right)$$
$$\Rightarrow g(x) \ge 0$$

- g *est décroissante sur* $]1;+\infty[$; *et* $g\left(\sqrt{2}\right) = 0$

$$Alors\ soit : 1 < x \le \sqrt{2} \Rightarrow g(x) \ge g\left(\sqrt{2}\right)$$
$$\Rightarrow g(x) \ge 0$$
$$x \ge \sqrt{2} \Rightarrow g(x) \le g\left(\sqrt{2}\right)$$
$$\Rightarrow g(x) \le 0$$

D'où le tableau de signe de g *sur* $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$\|\|$		$+$	0	$-$	

2ème partie :

$$Pour\ tout x \in [-1;1] : f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$$

$$1)\ Pour\ tout x \in [-1;1]\ ; on\ a : f'(x) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1\right)'$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+3} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x^2+3} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}\right)}{\left(x^2+3\right)}$$

$$= \frac{2\left(x^2+3-x^2\right)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \frac{6}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$$

Donc $\left(\forall x \in [-1;1]\right)$; $f'(x) = \dfrac{6}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$

2) $\left(\forall x \in [-1;1]\right)$; $f'(x) > 0$

Tableau de variations de f sur $[-1;1]$

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

$f(1) = \dfrac{2\times 1}{\sqrt{1^2+3}} - 1 = 0$; et comme $f(1)$ est une valeur maximale pour f sur $[-1;1]$;

alors $\left(\forall x \in [-1;1]\right)$; $f(x) \le 0$

<u>3ème partie</u> :

Soit h la fonction définie sur par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 & si \quad x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ h(x) = \sqrt{x^2+3} & si \quad x \in [-1;1] \end{cases}$

1) • $h(-1) = \sqrt{(-1)^2+3} = 2$ et $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 = 2$

Donc $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = h(-1)$; par suite h est continue à gauche en -1.

• $h(1) = \sqrt{1^2+3} = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) \ne h(1)$; par suite h n'est pas continue à droite en 1.

On a : $x \mapsto \sqrt{x^2+3}$ est continue sur IR en particulier à droite en -1 et à gauche en 1

D'où h est continue en -1 et n'est pas continue en 1.

2) Sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$; $h(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$

On a $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\Rightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$$\begin{aligned} \text{Et } h(2\times 0 - x) + h(x) &= \frac{2\sqrt{(-x)^2-1}}{(-x)} - (-x) + 1 + \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 \\ &= -\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} + x + 1 + \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc : $\begin{cases} x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\Rightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ h(2\times 0-x)+h(x)=2\times 1 \end{cases}$; d'où la courbe (C_h) admet un centre de symétrie $I(0;1)$ sur l'intervalle $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

3) a) • On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} - x + 1 = -\infty$$

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)-(-x+3) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1 + x - 3 = 0$,

Donc la droite (D_1) d'équation $y=-x+3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$

b) Soit $M(x;-x+3)\in D_1$ alors son symétrique par rapport à $I(0;1)$ est $M'(-x;x-1)\in D_2$; donc D_1 et D_2 sont symétriques par rapport à $I(0;1)$ et comme $I(0;1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_h) sur l'intervalle $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$; alors on déduit que la droite $D_2 : y=-x-1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $-\infty$

4) Etudions la dérivabilité de h en 1 à droite

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1}{x-1}$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - (x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} - 1$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2}{x} \times \frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)} - 1$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2}{x} \times \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} - 1$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2}{x} \times \sqrt{\frac{(x+1)}{(x-1)}} - 1 = +\infty$$

Donc h n'est pas dérivable à droite en 1 et la courbe (C_h) admet une demi-tangente dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse 1.

5) a) pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$; on a : $h'(x) = \left(\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1\right)'$

$$= \frac{2\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\times x - 2\sqrt{x^2-1}}{x^2} - 1$$

$$= \frac{2x^2 - 2\left(x^2-1\right)}{x^2\sqrt{x^2-1}} - 1$$

$$= \frac{2 - x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

b) Donc $h'(x)$ est du même signe que $g(x)$ sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

D'après <u>la partie 1</u> • $g(x) \le 0$ sur $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

Donc $h'(x) \le 0$ sur $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ et sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

• $g(x) \ge 0$ sur $\left[-\sqrt{2};-1\right[\cup \left]1;\sqrt{2}\right]$

Donc $h'(x) \ge 0$ sur $\left[-\sqrt{2};-1\right[$ et sur $\left]1;\sqrt{2}\right]$

6) a) pour tout $x \in [-1;1]$; on a : $h'(x) = \left(\sqrt{x^2+3}\right)'$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

b) Donc $h'(x)$ est du même signe que x ;

• $h'(x) \le 0$ sur $[-1;0]$

• $h'(x) \ge 0$ sur $[0;1]$

7) Le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2 ‖	↘	$\sqrt{3}$	↗	2 ‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$

8) • l'équation de la demi-tangente à gauche de 1 est : $y_g = h_g'(1)(x-1) + h(1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2+3}}(x-1)+2$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)+2$$

$$= \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

- *l'équation de la demi-tangente à droite de -1 est :* $y_d = h'_d(-1)(x+1)+h(-1)$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+3}}(x+1)+2$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)+2$$

$$= -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

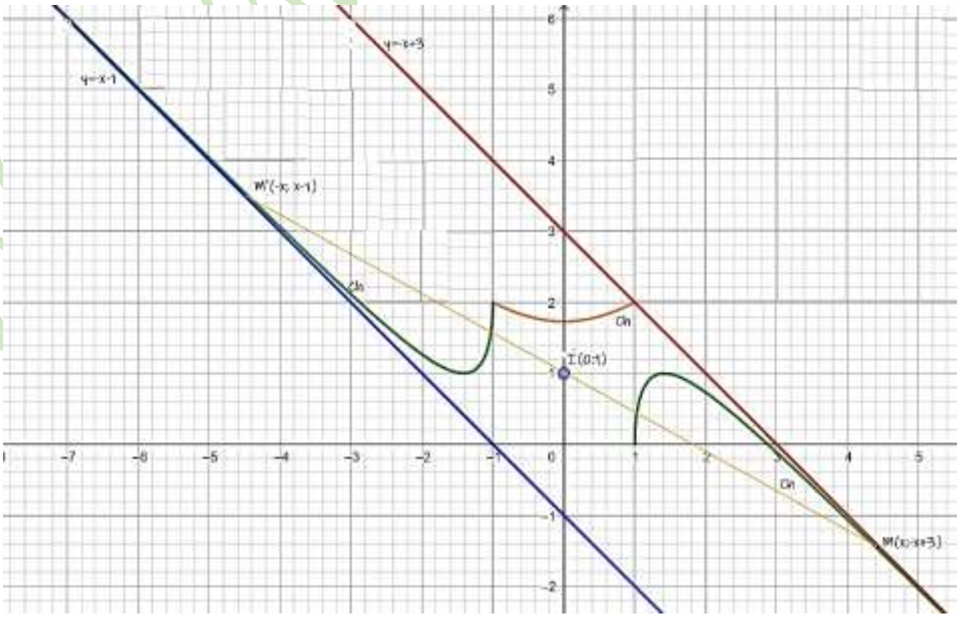
9) h est continue strictement décroissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$; $h\left(\left[\sqrt{2};+\infty\right[\right) = \left]-\infty;1\right]$ *et* $0 \in \left]-\infty;1\right]$ *donc il existe un unique réel* $\alpha \in \left[\sqrt{2};+\infty\right[\,/ h(\alpha)=0$.

On a : $h(2)=\sqrt{3}-1>0$ *et* $h(3)=\frac{4}{3}\sqrt{2}-2<0$

Donc : $h(3)<0<h(2) \Rightarrow h(3)<h(\alpha)<h(2)$

$\Rightarrow 2<\alpha<3$ *(Car h est strictement décroissante sur* $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ *)*

10) Construction de (C_h) *; la droite* (D_1) *et la droite* (D_2) *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.



4ème partie :

Soit u la restriction de h à l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

1 – u est continue et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ donc elle admet une fonction réciproque u^{-1} définie sur un intervalle J.

$J = h\left(\left[\sqrt{2};+\infty\right[\right) = \left]-\infty;1\right]$

2- On a : $u(\alpha) = h(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = u^{-1}(0)$ et $u'(\alpha) = h'(\alpha) = \dfrac{2-\alpha^2\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2-1}}$

D'où $u'(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2-1}} - 1$ et $h(\alpha) = 0 \Rightarrow \dfrac{2\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha} - \alpha + 1 = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$$

Donc : $u'(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha^2 \times \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}} - 1$

$$= \frac{4}{\alpha^4+\alpha^3} - 1$$

$$= \frac{4-\alpha^4-\alpha^3}{\alpha^4+\alpha^3} \qquad \text{et } 2 < \alpha < 3 \Rightarrow \begin{cases} 16 < \alpha^4 < 81 \\ 8 < \alpha^3 < 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 24 < \alpha^4 + \alpha^3 < 109$$

$$\Rightarrow -109 < -\alpha^4 - \alpha^3 < -24$$

$$\Rightarrow -105 < 4 - \alpha^4 - \alpha^3 < -20$$

$u'(\alpha) = u'\left(u^{1}(0)\right) \neq 0$

Et $\left(u^{-1}\right)'(0) = \dfrac{\alpha^4+\alpha^3}{4-\alpha^4-\alpha^3}$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} - x$

4) a- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- donner le tableau de variation de f

2) montrer qu'il existe un seul réel α de $]2,3[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

c) montrer que : $\left(f^{-1}\right)'(\alpha) = \dfrac{4\alpha^2}{9-4\alpha^2}$

Exercice 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que :
$(\forall x \in]a,b[) : \ f'(x) \neq 0$
Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au plus une solution dans $]a,b[$.

Exercice 6 :

On considère une fonction f dérivable sur $[0,1]$ telle que : $f(0)=f'(0)=0$ et $f(1)=0$.

Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{f(x)}{x} & si \ \ x \neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue sur $[0,1]$
2) a- Montrer qu'il existe un réel c de $]0,1[$ tel que $cf'(c)-f(c)=0$.
b- On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
Montrer que (C) possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.

Exercice 7:

On considère une fonction f dérivable sur $[0,1]$ et positive strictement sur $]0,1[$ et $f(0)=0$

Montrer que $(\exists c \in]0,1[) \ : \ \dfrac{2f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$