Examen nationale bac Sc Economie
Session de rattrapage 2015

Exercice 1 : (4,5 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1- Calculer U_1 et U_2.

2- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 4$.

3- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{4}(U_n - 4)$.

b) Déduire que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente .

4- On pose : $V_n = U_n - 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Calculer V_0.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

c) Ecrire V_n en fonction de n ; puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 (11 points)

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln x$.

1) Montrer que : $g'(x) = \frac{x-1}{x}$; pour tout $x \in]0;+\infty[$.

2) Etudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

3) Calculer $g(1)$; puis dresser le tableau de variations de g.

(Le calcul des limites n'est pas demandé).

4) Déduire que : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 - 2x\ln x$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$.

2) a) Vérifier que : $f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\right)$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ Puis donner une interprétation au résultat.

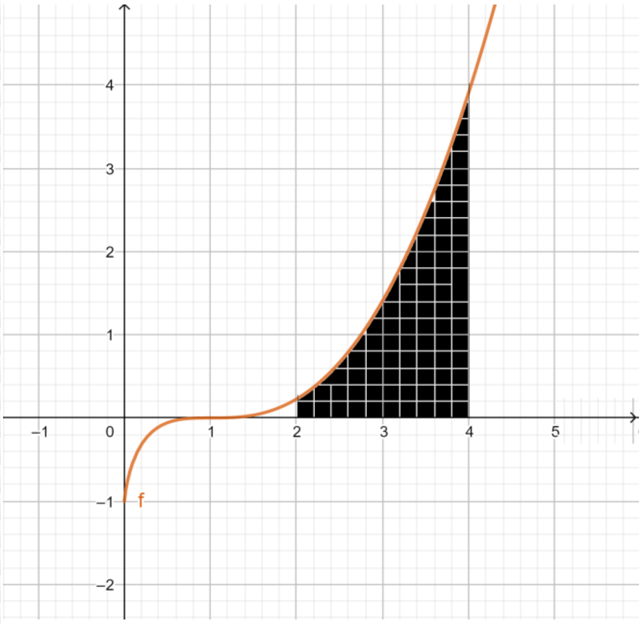
3) a) Montrer que : $f'(x) = 2g(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

b) Déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$; puis dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

5) a) En utilisant une intégration par parties montrer que : $\int_2^4 2x\ln x\, dx = 28\ln 2 - 6$.

b) calculer l'aire de la partie hachurée dans la représentation de (C_f) (la figure ci-dessous)



Exercice 3 : (4,5 points)

Une Urne contient 10 boules indiscernable au toucher ; 5 boules Blanches , 3 boules Rouges et 2 boules Vertes.

On tire d'une façon aléatoire et simultanément 3 boules de l'Urne.

1- Montrer que le nombre de tirages possibles est 120 .

2- On considère les événements A et B suivants :

A « Les trois boules tirées sont de même couleur »

B « Parmi les boules tirées il y'a au moins deux boules rouges »

a) Montrer que : $P(A) = \frac{11}{120}$.

b) Calculer $P(B)$.

3- Soit X la variable aléatoire liée au nombre de boules Vertes tirées .

Compléter le tableau ci-dessous et justifier vos réponses :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$			