1- Déterminer les termes d'une suite explicité

Exercice 1

1 -Soit (u_n) la suite définie par: $n \in \mathbb{N}$; $u_n = 3^n - 2^n$

Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 .

2- On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $v_n = \dfrac{2}{n^2+n}$

Calculer v_1 ; v_2 et v_3 ..

Correction

1- On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 3^n - 2^n$; donc :

- $u_0 = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ d'où : $\boxed{u_0 = 0}$
- $u_1 = 3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1$ d'où : $\boxed{u_1 = 1}$
- $u_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ d'où : $\boxed{u_2 = 5}$
- $u_3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$ d'où : $\boxed{u_3 = 19}$

2- On a : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $v_n = \dfrac{2}{n^2+n}$; donc :

- $v_1 = \dfrac{2}{1^2+1} = \dfrac{2}{2} = 1$ d'où : $\boxed{v_1 = 1}$
- $v_2 = \dfrac{2}{2^2+2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ d'où : $\boxed{v_2 = \dfrac{1}{3}}$
- $v_3 = \dfrac{2}{3^2+3} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$ d'où : $\boxed{v_3 = \dfrac{1}{6}}$
- $v_4 = \dfrac{2}{4^2+4} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$ d'où : $\boxed{v_4 = \dfrac{1}{10}}$

2- Déterminer les termes d'une suite définie par récurrence. Raisonnement par récurrence

Exercice 2

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n} ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Calculer U_1 ; U_2 et U_3.

2. Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n = \dfrac{2}{2n+1}$

Correction

1. *On a :* $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n}$ *; donc :*

■ $U_1 = \dfrac{U_0}{1+U_0} = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$ *alors :* $\boxed{U_1 = \dfrac{2}{3}}$.

■ $U_2 = \dfrac{U_1}{1+U_1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{5}$ *alors :* $\boxed{U_2 = \dfrac{2}{5}}$.

■ $U_3 = \dfrac{U_2}{1+U_2} = \dfrac{\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \dfrac{7}{5}$ *alors :* $\boxed{U_3 = \dfrac{2}{7}}$.

2. *Montrons par récurrence que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Pour n= 0.

On a:

$$\frac{2}{2\times 0+1} = 2 = U_0$$

Donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Soit $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$ *;*

supposons que : $U_n = \dfrac{2}{2n+1}$ *et montrons que* $U_{n+1} = \dfrac{2}{2(n+1)+1}$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n} = \dfrac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \dfrac{2}{2n+1+2} = \dfrac{2}{2(n+1)+1}$

Alors : $U_{n+1} = \dfrac{2}{2(n+1)+1}$

Donc : la propriété est vraie pour n+1.

Conclusion *:*

On a montré par récurrence que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

3 - Utiliser un raisonnement par récurrence

Exercice 3

Soit (u_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 2^{n+1} - 1$

Correction

Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 2^{n+1} - 1$

Pour n= 0

• *On a :* $2^{0+1} - 1 = 1 = u_0$.

Donc la propriété est vraie pour n = 0.

• ***Soit*** $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$ *;*

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896

Supposons que : $u_n = 2^{n+1} - 1$ et montrons que : $u_{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$

On a : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2\times\left(2^{n+1} - 1\right) + 1 = 2^{n+1+1} - 2 + 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$.

Ainsi, la propriété est vraie pour n+ 1.

Conclusion :

On a montré par récurrence que ; $(\forall n\in\mathbb{N})\,; u_n = 2^{n+1} - 1$.

1- Suites bornées

Exercice 4

1. Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\ u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,; 0 < u_n < 1$. Conclure.

2. Soit (v_n) la suite définie par: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\ v_n = \dfrac{2}{n} - \sin(n)$

Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Correction

1. Montrons que: $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\ 0 < u_n < 1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $n \geq 0$ et $n^2+1 > 0$; donc : $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} \geq 0$

On a : $n < n^2+1$ (car $x\in\mathbb{R}\,;\ x^2+1-x > 0$; $\Delta = -3$ et $a = 1$)

donc: $\dfrac{n}{n^2+1} < 1$ d'où : $u_n < 1$

Ainsi : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\ 0 \leq u_n < 1$. D'où : (un), est bornée.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

On a : $n \geq 1$, donc : $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$ par suite : $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$ or : $-1 < -\sin(n) < 1$

donc, par somme : $-1 < \dfrac{2}{n} - \sin(n) \leq 3$ c'est-à-dire : $-1 < v_n \leq 3$.

Donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

2- Récurrence et monotonie d'une suite

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n^{\,2} \quad ;(\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,; 0 < u_n < 1$.

2- En déduire que (u_n) est décroissante.

Correction

1- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});0<u_n<1$.

Pour n=0

On a : $u_0=\frac{1}{2}$ *; donc :* $0<u_0<1$.

Ainsi, la propriété est vraie pour n = 0.

• ***Soit*** $n \in \mathbb{N}$ *, supposons que* $0<u_n<1$ *et montrons que* $0<u_{n+1}<1$.

On a: $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n{}^2$ *et* $0<u_n<1$

Donc: $0<\frac{1}{4}u_n{}^2<\frac{1}{4}<1$

Ainsi : $0<u_{n+1}<1$.

Donc, la propriété est vraie pour n+ 1.

D'où, on a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});0<u_n<1$.

2- Déduisons que (u_n) *est décroissante:*

Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a :* $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n{}^2-u_n=\frac{1}{4}u_n(u_n-4)$ *Comme* $0<u_n<1<4$

alors : ($u_n-4<0$ *et* $u_n>0$ *)*

D'où : $u_{n+1}-u_n<0$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1}<u_n$

Donc : (u_n) *est décroissante.*