Étude de fonction exponentielle

2eme bac PC-SVT

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; puis étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

3) Etudier la continuité de f en 0.

4) Etudier la position relative de (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

5) a- Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - x - 1$ et démontrer que, pour tout réel x on a : $e^x \geq x + 1$

b- Calculer la dérivé f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$

c- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

6) Construire (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par (C) ;l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Montrer que $A \leq e - 1$

PARTIE B

1) Calculer en utilisant une intégration par parties $\int_0^x te^t dt$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

2) Soit a une constance réelle et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = xe^x - a$

Soit U la primitive de u sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exprimer $U(x)$ à l'aide d'une intégrale.

En déduire $U(x)$ en fonction de x .