Les suites numériques

■ Suite Arithmétique – Suite Géométrique

	Suite Arithmétique	Suite Géométrique
Définition	$u_{n+1}=u_n+r$ (r est la raison de la suite)	$u_{n+1}=q\times u_n$ (q est la raison de la suite)
Terme général	$u_n=u_p+(n-p)\times r\quad (p\le n)$	$u_n=u_p\times q^{n-p}\quad (p\le n)$
Somme de termes successifs	$u_p+\ldots+u_n=(n-p+1)\dfrac{u_p+u_n}{2}$	$u_p+\ldots+u_n=u_p\times\left(\dfrac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}\right)$ $(q\neq 1)$
Soit $u_{n-1};u_n;u_{n+1}$ trois termes successifs	$2u_n=u_{n+1}+u_{n-1}$	$u_n^{\ 2}=u_{n+1}\times u_{n-1}$

■ Suite Majorée - Suite Minorée

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $\exists M\in IR\ /\ U_n\le M\quad(\forall n\in I)\Leftrightarrow(U_n)_{n\in I}$ est majorée par le réel M.
- $\exists m\in IR\ /\ U_n\ge m\quad(\forall n\in I)\Leftrightarrow(U_n)_{n\in I}$ est minorée par le réel m.
- $(U_n)_{n\in I}$ majorée et minorée $\Leftrightarrow$ $(U_n)_{n\in I}$ bornée.

■ Variations d'une suite numérique

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $U_{n+1}\le U_n\quad(\forall n\in I)\Leftrightarrow(U_n)_{n\in I}$ est décroissante.
- $U_{n+1}\ge U_n\quad(\forall n\in I)\Leftrightarrow(U_n)_{n\in I}$ est croissante.
- $U_{n+1}=U_n\quad(\forall n\in I)\Leftrightarrow(U_n)_{n\in I}$ est constante.

■ Limite d'une suite numérique

° limite d'une suite n^{α} avec $(\alpha\in\mathbb{Q})$

$\alpha>0$	$\alpha<0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}=0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}=+\infty$

° limite d'une suite géométrique q^n $(q\in IR)$

$q>1$	$q=1$	$-1<q<1$	$q\le -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$	La suite (q^n) n'a pas de limite

■ *Critères de convergences*

⊙ *Toute suite croissante et majorée est convergente (càd admet une limite finie)*
⊙ *Toute suite décroissante et minorée est convergente (càd admet une limite finie)*

$$\left.\begin{array}{l} v_n \le u_n \le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$$

$$\left.\begin{array}{l} |u_n - l| \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \ge v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

■ *Suite définie par une fonction* $(U_{n+1} = f(U_n))$

⊙ *Soit* (U_n) *une suite numérique définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

tel que f est une fonction continue sur un intervalle I ; $f(I) \subset I$ *et* $a \in I$,
si (U_n) *est convergente alors sa limite est solution de l'équation* $f(x) = x$.

⊙ *Soit* (U_n) *et* (V_n) *deux suites numériques*
telles que : $V_n = f(U_n)$
Si (U_n) *converge vers une limite l et f une fonction continue en l alors* (V_n) *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(l)$.