Correction Examen national 2016
Session normale

2éme Bac S.M

Exercice 1

► $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;\times\right)$ est un anneau unitaire ; $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

et $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif.

► $M(x;y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$

► $E=\left\{M(x;y)/(x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) Montrons que $(E;+)$ est un show-groupe de $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+\right)$

• $E\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $E\neq\varnothing$ (car $M(0;0)\in E$)

• On a : $\left(\forall((x;y);(a;b))\in\mathbb{R}^2\right)$;

$$M(x;y)-M(a;b)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+b&0&-2b\\0&0&0\\b&0&a-b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(x-a)+(y-b)&0&-2(y-b)\\0&0&0\\(y-b)&0&(x-a)-(y-b)\end{pmatrix}$$

$$=M(x-a;y-b)$$

Et $M(x-a;y-b)\in E$ (car $(x-a;y-b)\in\mathbb{R}^2$)

Donc E est un sous-groupe de $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+\right)$.

2) $\left(\forall((x;y);(x';y'))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\right)$; $M(x;y)\times M(x';y')=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'+y'&0&-2y'\\0&0&0\\y'&0&x'-y'\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}(x+y)(x'+y')-2yy'&0&-2y'(x+y)-2y(x'-y')\\0&0&0\\y(x'+y')+(x-y)y'&0&-2yy'+(x-y)(x'-y')\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}xx'-yy'+xy'+x'y&0&-2(x'y+yy'+xy'-yy')\\0&0&0\\x'y+yy'+xy'-yy'&0&-2yy'+xx'-xy'-x'y+yy'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(xx'-yy')+(xy'+x'y)&0&-2(xy'+x'y)\\0&0&0\\(xy'+x'y)&0&(xx'-yy')-(xy'+x'y)\end{pmatrix}$$

$=M(xx'-yy';xy'+x'y)$

Donc : $\left(\forall((x;y);(x';y'))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\right)$; $\boxed{M(x;y)\times M(x';y')=M(xx'-yy';xy'+x'y)}$

3) a) $\left(\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2\right)$ alors : / $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec $\left((x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\right)$

On a : $\varphi(z\times z')=\varphi((x+iy)\times(x'+iy'))$

$=M(xx'-yy';xy'+x'y)$

$=M(x;y)\times M(x';y')$

$=\varphi(z)\times\varphi(z')$

Donc : $\left(\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2\right)$; $\boxed{\varphi(z\times z')=\varphi(z)\times\varphi(z')}$

Par suite φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(E;\times)$.

b) $\varphi(\mathbb{C}^*)=\{\varphi(z)/z\in\mathbb{C}^*\}$

$=\{\varphi(a+ib)/(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\}$

$=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\}$

Donc $\varphi(\mathbb{C}^*)=E-\{M(0,0)\}=E^*$

On a φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(E;\times)$ et $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif alors $(\varphi(\mathbb{C}^*);\times)$ cad $(E^*;\times)$ est un groupe commutatif.

1 est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*;\times)$, donc $\varphi(1)=M(1;0)$ est l'élément neutre de $(E^*;\times)$.

4) $(E;+)$ est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+)$, donc $(E;+)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(0;0)$

Et $(E^*;\times)$ est un groupe commutatif.

''x'' est distributive par rapport à ''+''dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Donc ''x'' est distributive par rapport ă ''+'' dans E.

Par suite $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

5) a) On a : $(\forall M(x;y)\in E)$;

$$A\times M(x;y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Donc : $(\forall M(x;y)\in E)$; $\boxed{A\times M(x;y)=M(0;0)}$

b) Soit $M(x;y)\in E$; supposons qu'il existe $M(x;y)\in E$ qui admet un symétrique M^{-1} dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$;donc : $M(x;y)\times M^{-1}=I$

Alors $A\times\left(M(x;y)\times M^{-1}\right)=A$, d'où $\left(A\times M(x;y)\right)\times M^{-1}=A$ (car x est associative dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

Donc $A=M(0;0)\times M^{-1}=M(0;0)$

D'où $A=M(0;0)$ ce qui est impossible.

Par suite il n'existe aucun élément de E symétrisable dans $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times\right)$.

Exercice 2

Partie I

Soit $(a;b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et le nombre premier 173 divise (a^3+b^3).

1- On a : $a^3+b^3\equiv 0\ [173]\Leftrightarrow 173|a^3+b^3$

$$\Leftrightarrow a^3\equiv -b^3\ [173]$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3\right)^{57}\equiv\left(-b^3\right)^{57}\ [173]$$

Par suite : $\boxed{a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]}$.

2. On a : ■) $173|a\Rightarrow 173|a^3$

Et comme $173|a^3+b^3$

Alors : $173|\left(a^3+b^3\right)-a^3$

D'où : $173|b^3$

Et comme 173 est premier ; alors $173|b$

■) De même si $173|b$ on montre que : $173|a$

<u>Conclusion :</u> $173|a\Leftrightarrow 173|b$.

3. On a : $173|a\Leftrightarrow 173|b$

D'où : $173|a+b$

Donc si $173|a$ alors $\boxed{173|a+b}$.

4- a) On a : 173 ne divise pas a, donc d'après le question 2- 173 ne divise pas b;

D'où d'après le petit théorème de Fermat :

$a^{172}\equiv 1\ [173]$ et $b^{172}\equiv 1\ [173]$

(Cor 173 *ne divise pas* $a\Leftrightarrow 173\wedge a=1$ et 173 *ne divise pas* $b\Leftrightarrow 173\wedge b=1$; 173 étant premier)

Par suite : $\boxed{a^{172}\equiv b^{172}\ [173]}$

b) On a : $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ et $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$

Donc : $a^{172}\equiv -b\times a^{171}\ [173]$

$a^{171}\times(a+b)\equiv 0\ [173]$.

c) On a : 173 ne divise pas a , donc 173 ne divise pas a^{171}.

et comme 173 est premier alors : $173\wedge a^{171}=1$

On a : 173 divise $a^{171}\times(a+b)$

Alors d'après le théorème de Gauss173 divise $(a+b)$.

Partie II

1- Pour tout x ; y et k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1)\end{cases}\Rightarrow\left(x^2-xy+y^2\right)173k=173(xy+1)$$

$$\Rightarrow\left((x-y)^2+xy\right)k=(xy+1)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2=1+xy(1-k)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

Donc : $\boxed{k(x-y)^2+(k-1)xy=1}$

2. ■ On suppose que $k\neq 1$; d'après ce qui précède on a : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

Donc : $k(x-y)^2=1-(k-1)xy \qquad (*)$

Comme x ; y et k appartiennent à $\mathbb{N}^*$ alors : $k\geq 2$ et $xy\geq 1$

donc : $k(x-y)^2\leq 0$.

D'où : $x=y$

Et l'équation $(*)$ devient : $(k-1)xy=1$

Donc : $x=y=(k-1)=1$

ce qui est contradictoire car : $x+y=173k\geq 173$.

Par suite notre supposition est fausse et $k=1$.

■ $(E)\Rightarrow\begin{cases}(x-y)^2=1\\ x+y=173\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-y)=1\\ x+y=173\end{cases} ou \begin{cases}(x-y)=-1\\ x+y=173\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=174\\ 2y=172\end{cases} ou \begin{cases}2x=172\\ 2y=174\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=87\\ y=86\end{cases} ou \begin{cases}x=86\\ y=87\end{cases}$$

Réciproquement on a :

$87^3+86^3=(86+87)(87^2-87\times 86+86^2)=173(87+86^2)=173(1+87\times 86)$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S=\{(87;86);(86;87)\}$.

Exercice 3

Soit $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

1) a) on a : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{z_1-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}{z_2-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}\times\dfrac{z_2}{z_1}$

$$=\frac{z_1(z_1+z_2)-2z_1z_2}{z_2(z_1+z_2)-2z_1z_2}\times\frac{z_2}{z_1}$$

$$=\frac{z_1^2+z_1z_2-2z_1z_2}{z_2^2+z_1z_2-2z_1z_2}\times\frac{z_2}{z_1}$$

$$=\frac{z_1(z_1-z_2)}{-z_2(z_1-z_2)}\times\frac{z_2}{z_1}=-1$$

b) Comme O ; M_1 et M_2 ne sont pas alignes et $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$, alors :

$\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2-0}{z_1-0}\in\mathbb{R}$ et O ; M_1 ; M_2 et M ne sont pas alignes ; donc :

les points O ; M_1 ; M_2 et M sont cocycliques.

Par suite , M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

2) On a : $z_2 = \bar{z}_1$; donc : $z = \dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2} = \dfrac{2z_1\bar{z}_1}{z_1+\bar{z}_1} = \dfrac{2|z_1|^2}{2\mathrm{Re}(z_1)} = \dfrac{|z_1|^2}{\mathrm{Re}(z_1)}$

D'où $z \in \mathbb{R}$; par suite M appartient à l'axe des réels.

3) $R(O;\alpha \in]0;\pi[)$

a) on a : $M_2 = R(M_1) \Leftrightarrow \boxed{z_2 = z_1.e^{i\alpha}}$

b) On a : $\dfrac{z_2}{z_1} = e^{i\alpha}$ et $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$.

Donc $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times e^{i\alpha} = -1 \Rightarrow z - z_2 = (z_1 - z)\times e^{i\alpha}$

D'où : $|z - z_2| = |z - z_1|$; alors : $M_2M = M_1M$

Par suit , M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4) a) On a : z_1 et z_2 solutions de l'équation (E) : $6t^2 - (e^{i\theta}+1)t + (e^{i\theta}-1) = 0$

z_1 et z_2 sont solutions de l'équation (E), donc $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{e^{i\theta}+1}{6} \\ z_1 \times z_2 = \dfrac{e^{i\theta}-1}{6} \end{cases}$

D'où : $z = \dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

$= 2\dfrac{\dfrac{e^{i\theta}-1}{6}}{\dfrac{e^{i\theta}+1}{6}}$

$= 2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

Alors : $\boxed{z = 2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}}$

b) on a :

► $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

► $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

D'où : $\boxed{z = 2i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

On a : $0 < \theta < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

Donc : $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

Par suite le forme trigonométrique du nombre complexe z est :

$\boxed{z = 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$

Exercice 4

Partie I

1) Soit $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ et $x > 0$

φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; donc φ est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$

D'où d'après le théorème des accroissements finis; on a :

$(\exists\theta \in]0;x[) / \varphi(x) - \varphi(0) = x.\varphi'(\theta)$ et $\varphi'(\theta) = -e^{-\theta}$.

Donc : $\frac{e^{-x} - 1}{x} = -e^{-\theta}$

D'où : $\frac{x}{1 - e^{-x}} = e^{\theta}$

Alors : $(\forall x > 0)$; $(\exists\theta \in]0;x[) /$ $\boxed{e^{\theta} = \frac{x}{1 - e^{-x}}}$

2) on a : $0 < \theta < x$; donc $1 < e^{\theta} < e^{x}$

Par suite : $(\forall x > 0)$; $1 < \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^{x}$

On en déduit :

a) $(\forall x > 0)$; $\frac{x}{1 - e^{-x}} > 1 \Rightarrow \boxed{1 - x < e^{-x}}$

b) $(\forall x > 0)$; $\frac{x}{1 - e^{-x}} < e^{x} \Rightarrow \boxed{x + 1 < e^{x}}$

c) $(\forall x > 0)$; $1 < \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^{x} \Rightarrow 1 < \frac{xe^{x}}{e^{x} - 1} < e^{x}$

$\Rightarrow 1 < \frac{xe^{x}}{e^{x} - 1} < e^{x}$

$\Rightarrow \boxed{0 < \ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x} - 1}\right) < x}$

Partie II

$$\begin{cases} f(x) = \frac{xe^{x}}{e^{x} - 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) a) On a : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{xe^{x}}{e^{x} - 1}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\frac{e^x-1}{x}} = 1$$

Et $f(0)=1$ donc : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Par suite f est continue à droite en O.

b) On a : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x-xe^x+x}{e^x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}\right) = 0 \qquad \left(\text{Car } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\right)$$

Donc (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) D'après la question (2) a) parte I); on a:

$(\forall t>0)\ ;1-t<e^{-t}$

Soit $x \ge 0$; les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto (1-t)$ sont continues sur $[0;x]$ donc :

$\int_0^x (1-t)dt \le \int_0^x e^{-t}dt$; d'où : $\boxed{x-\frac{x^2}{2} \le -e^{-x}+1}$

b) D'après la question précédente on déduit que ; pour tout $x \ge 0$

$e^{-x}+x-1 \le \frac{x^2}{2}$

et on a : $(\forall t>0)$; $\boxed{t-\frac{t^2}{2} \le -e^{-t}+1}$

Soit $x \ge 0$; les fonctions $t \mapsto t-\frac{t^2}{2}$ et $t \mapsto -e^{-t}+1$ sont continues sur $[0;x]$; donc :

$$\int_0^x \left(t-\frac{t^2}{2}\right)dt \le \int_0^x \left(-e^{-t}+1\right)dt$$

D'où : $(\forall x \ge 0)$; $\boxed{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \le e^{-x}+x-1 \le \frac{x^2}{2}}$

3) a) pour tout $x>0$; on a : $\frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{xe^x}{e^x-1}-1\right)\times\frac{1}{x}$

$$= \frac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}\times\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\left(e^{-x}+x-1\right)}{e^x-1}\times\frac{e^x}{x}$$

$$= \frac{\left(e^{-x}+x-1\right)}{x^2}\times\frac{xe^x}{e^x-1}$$

Donc : $(\forall x>0)$; $\boxed{\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\times f(x)}$

b) D'après la question 2) b); on a $(\forall x>0)$: $\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\le\frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)=\frac{1}{2}$

Donc $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$

De plus on a : $\lim_{x\to0^+}f(x)=1$

Par suite : $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$

Cad: $\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{2}}$

Donc f est dérivable à droite en 0 ; et $\boxed{f'_d(0)=\frac{1}{2}}$.

Interprétation géométrique :

(C) admet une demi-tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ à droite du point $A(0;1)$.

4) a) les fonctions $x\mapsto xe^x$ et $x\mapsto e^x-1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$; en particulier sur $]0;+\infty[$

Et $(\forall x>0)$: $e^x-1\neq0$. Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$

et pour tout $x\in]0;+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}$

b) D'après la question 2) a) partie I ; on a : $(\forall x>0)$; $x+1<e^x$

On en déduit que : $(\forall x>0)$; $e^x-1-x>0$

Càd $(\forall x>0)$; $f'(x)>0$

D'où : f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Partie III

$$\begin{cases}u_0>0\\u_{n+1}=\ln(f(u_n))\end{cases}\quad;(\forall n\in IN)$$

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n\in IN)$; $u_n>0$

Pour n=o

On a : $u_0>0$

Soit n∈ IN

Supposons que $u_n>0$ et montrons que $u_{n+1}>0$

On a $u_n>0$ et f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$; donc:

$f(u_n)>f(0)$ et $f(0)=1$.

D'où : $f(u_n)>1$, donc $\ln(f(u_n))>0$

Par suite : $u_{n+1}>0$

Conclusion

On a montré par récurrence que : $(\forall n\in IN)$; $u_n>0$

b) D'après la question 2) c) partie I ; on a : $(\forall x>0)$ $0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

Et comme $u_n > 0$, alors : $0 < \ln\left(\dfrac{u_n e^{u_n}}{e^{u_n}-1}\right) < u_n$ d'où $0 < \ln\left(f\left(u_n\right)\right) < u_n$

Donc : $u_{n+1} < u_n$

D'où : la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et comme elle est minore par 0 ; alors elle est convergente.

c) On a : $\ln\left(f(0)\right) = \ln(1) = 0$

Donc 0 est une solution de l'équation $\ln\left(f(x)\right) = x$;

et d'après la question 2) c) partie I ; on a : $(\forall x > 0)$; $0 < \ln\left(f(x)\right) < x$.

Donc l'équation $\ln\left(f(x)\right) = x$ n'admet pas de solution dans $]0;+\infty[$.

Alors 0 est l'unique solution de l'équation $\ln\left(f(x)\right) = x$

On pose : $\left(\forall x \in [0;+\infty[\right)$; $g(x) = \ln\left(f(x)\right)$

f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc

$(\forall x \geq 0)$: $f(x) \geq f(0)$ et f(0)=1 , donc $(\forall x \geq 0)$: $f(x) \geq 1$

$f\left([0;+\infty[\right) \subset [1;+\infty[$

et ln est continue $[1;+\infty[$; donc g est continue sur $[0;+\infty[$ et $g\left([0;+\infty[\right) \subset [0;+\infty[$

et on $\left(u_n\right)$ est convergente donc si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est la solution de l'équation $g(x) = x$

sur $[0;+\infty[$ (càd $\ln\left(f(x)\right) = x$)

Comme 0 est l'unique solution de l'équation $\ln\left(f(x)\right) = x$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 5

$(\forall x > 0)$; $F(x) = \displaystyle\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\,dt$

1)a) ► **1er Cas** $\ln 2 \leq x$

la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}}$ est continue et positive sur $[\ln 2;+\infty[$, donc : $\boxed{\displaystyle\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\,dt \geq 0}$

D'où : $\boxed{F(x) \geq 0}$.

► **2^{éme} Cas** $0 \leq x \leq \ln 2$

la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}}$ est continue et positive sur $[x;\ln 2]$, donc :

$\displaystyle\int_{x}^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\,dt \geq 0$; d'où : $\boxed{\displaystyle\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\,dt \leq 0}$

Donc : $\boxed{F(x) \leq 0}$.

b) la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}}$ est continue sur I et $\ln 2 \in I$; donc F est dérivable sur I; et on

a pour tout $x \in I$: $\boxed{F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}}$

c) $(\forall x>0)$; $F'(x)>0$, donc F est strictement croissante sur I.

2) a) On pose : $u=\sqrt{e^t-1}$; donc $t=\ln(1+u^2)$ et $dt=\frac{2u}{1+u^2}du$

D'où : $F(x)=\int_1^{\sqrt{e^x-1}}\left(\frac{1}{u}\times\frac{2u}{1+u^2}\right)dt$

$=2\int_1^{\sqrt{e^x-1}}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)dt$

$=2\left[\arctan(u)\right]_1^{\sqrt{e^x-1}}$

$=2\left(\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$

Par suite : $(\forall x\in I)$; $\boxed{F(x)=2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}}$

b) ► On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{e^x-1}=0$ et $t\mapsto\arctan(t)$ est continue en 0 ; donc :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)=\arctan(0)=0$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=-\frac{\pi}{2}}$

► On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\arctan(X)=\frac{\pi}{2}$; alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}}$

3) a) F est dérivable sur I ; donc F est continue sur I et F est strictement croissante sur I ,

alors F est une bijection de I vers $J=F(I)$: $F(I)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+}F(x);\lim\limits_{x\to+\infty}F(X)\right[=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

b) Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et tout $y\in\left]0;+\infty\right[$; on a :

$F^{-1}(x)=y\Leftrightarrow F(y)=x$

$\Leftrightarrow 2\arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)-\frac{\pi}{2}=x$

$\Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{e^y-1}=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ (car $0<\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$)

$\Leftrightarrow e^y-1=\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow e^y=1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$; $\boxed{F^{-1}(x)=\ln\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]}$