

guessmaths

Correction Examen Nationale

Session de rattrapage 2023

2^{ème} Bac SM

Exercice 1

Partie I

$$f_n : \begin{cases} f_n(x) = \sqrt{x} (\ln x)^n & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1- a) \text{ Soit } x > 0; \text{ on a : } (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n &= \left(2n \times x^{\frac{1}{2n}} \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n \\ &= x^{\frac{1}{2}} \left(2n \times \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n \\ &= \sqrt{x} \left(2n \times \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n \\ &= \sqrt{x} \left(2n \times \frac{1}{2n} \ln(x) \right)^n \\ &= \sqrt{x} (\ln(x))^n \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]0; +\infty[) ; (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n = \sqrt{x} (\ln(x))^n$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n = 0$$

$$\text{En posant } t = x^{\frac{1}{2n}} ; x \rightarrow 0^+ \text{ alors } t \rightarrow 0^+ ; \lim_{x \rightarrow 0^+} (t \ln(t)) = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

Donc f_n est continue à droite en 0.

$$b) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} (\ln(x))^n \right) = +\infty$$

$$(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x)) = +\infty)$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Pour tout } x \in]0; +\infty[\text{ on a : } (2n)^n \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n &= \left(\frac{2n \times \frac{1}{2n} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n \\
 &= \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n \\
 &= \frac{(\ln(x))^n}{\sqrt[n]{x}} \\
 &= \frac{\sqrt[n]{x} (\ln(x))^n}{x} \\
 &= \frac{f_n(x)}{x}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]0; +\infty[) ; \boxed{\frac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

En posant $t = x^{\frac{1}{2n}}$; $x \rightarrow +\infty$ alors $t \rightarrow +\infty$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 0}$$

Interprétation Géométrique

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 0$

Donc (C_n) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

$$d) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((2n)^n \frac{\left(\ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n}{x^{\frac{1}{2n}}} \right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right)}{x^{\frac{1}{2n}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(t)}{t} \right) = -\infty$$

En posant $t = x^{\frac{1}{2n}}$; $x \rightarrow 0^+$ alors $t \rightarrow 0^+$
Donc

$$\bullet) \text{ si } n \text{ est paire } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n}{x^{\frac{1}{2n}}} = +\infty$$

$$D'où \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty}$$

$$\bullet) \text{ si } n \text{ est impaire } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n}{x^{\frac{1}{2n}}} = -\infty$$

$$D'où \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty}$$

Interprétation :

*) **si n est paire**

f_n n'est pas dérivable à droite en 0 ; (C_n) admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse 0 dirigée vers le haut.

*) **si n est impaire**

f_n n'est pas dérivable à droite en 0 ; (C_n) admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse 0 dirigée vers le bas.

2) a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit des fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$

et $v : x \mapsto \ln x$ qui sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \left(\sqrt{x} (\ln x)^n \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^n + n \times \frac{1}{x} \times \sqrt{x} \times (\ln x)^{n-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^n + n \times \frac{1}{\sqrt{x}} \times (\ln x)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)$$

Donc : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \boxed{f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)}$

b) Soit $n \geq 2$; on a : $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x) = 0$

$$\Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} (\ln x)^{n-1} = 0 \\ 2n + \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = -2n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} x = 1 \\ x = e^{-2n} \end{cases}$$

► **si n est impaire**

Alors $(n-1)$ est pair donc $(\ln x)^{n-1} \geq 0$; d'où $f'_n(x)$ est du même signe que $(2n + \ln x)$

On a : $2n + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -2n$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-2n}$$

Donc : f_n est croissante sur $[e^{-2n}; +\infty[$ et décroissante sur $]0; e^{-2n}]$.

► **si n est paire**

Alors $(n-1)$ est impair $f'_n(x)$ est du même signe que $(\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)$

Tableau de ligne de $f'_n(x)$

x	0	e^{-2n}	1	$+\infty$
$(\ln x)^{n-1}$		—	0	+
$2n + \ln x$	—	0	+	
$f'_n(x)$	—	0	+	—

D'où : • f_n et croissante sur chacun des intervalles $]0; e^{-2n}]$ et $[1; +\infty[$ et décroissante sur $[e^{-2n}; 1]$

Tableau de variations de f_n

► si n est paire

x	0	e^{-2n}	1	$+\infty$
$f'_n(x)$	—	0	+	—
$f_n(x)$	0	$\left(\frac{2n}{e}\right)^n$	0	$+\infty$

► Si n est impaire

x	0	e^{-2n}	1	$+\infty$
$f'_n(x)$	—	0	+	+
$f_n(x)$	0	$\left(\frac{2n}{e}\right)^n$	0	$+\infty$

d) D'après le tableau de variations de f_n pour n impaire $n \geq 3$; on f_n s'annule en 1 sans changer de signe donc le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour (C_n) .

Partie II

1) Soit $\beta \in]1; e[$; et $(u_n) : u_n = f_n(\beta) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

a) On a : $1 < \beta < e \Rightarrow f_n(1) < f_n(\beta) < f_n(e)$

Car f_n est croissante sur $[1; +\infty[$

et $f_n(1) = 0 ; f_n(e) = \sqrt{e} \times (\ln e)^n = \sqrt{e}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_n < \sqrt{e}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+1} - u_n = f_{n+1}(\beta) - f_n(\beta)$
 $= \sqrt{\beta} \times (\ln \beta)^{n+1} - \sqrt{\beta} \times (\ln \beta)^n$

$$= \sqrt{\beta} \times (\ln \beta)^n (\ln(\beta) - 1)$$

Or $\beta \in]1; e[\Rightarrow \begin{cases} \ln \beta > 0 \\ \ln(\beta) - 1 < 0 \end{cases}$; donc $u_{n+1} - u_n < 0$

D'où (u_n) est décroissante.

c) On a $\beta \in]1; e[$; alors $0 < \ln(\beta) < 1$; d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln \beta)^n = 0$

et $u_n = f_n(\beta) = \sqrt{\beta} (\ln \beta)^n$; donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

2) a) f est continue et strictement croissante sur $[1; e]$; donc sa restriction à l'intervalle $[1; e]$ réalise une bijection de $[1; e]$ vers un intervalle $J = f([1; e]) = [f(1); f(e)]$

$$= [0; \sqrt{e}]$$

et comme $1 \in]0; \sqrt{e}[$; donc d'après le théorème de la bijection :

$(\exists ! x_n \in]1; e[)$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $f_n(x_n) = 1$ et $f_n(x_{n+1}) = \sqrt{x_{n+1}} (\ln x_{n+1})^n$

$$= \frac{\sqrt{x_{n+1}} (\ln x_{n+1})^{n+1}}{\ln x_{n+1}}$$

$$= \frac{f_{n+1}(x_{n+1})}{\ln x_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\ln x_{n+1}}$$

et comme $x_{n+1} \in]1; e[$; alors $\ln x_{n+1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\ln x_{n+1}} > 1$

$$\Rightarrow f_n(x_{n+1}) > 1$$

$$\Rightarrow f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n)$$

Et f_n est croissante sur f_n ; donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_{n+1} > x_n$

Donc (x_n) est croissante, de plus elle est majorée par e alors elle est convergente.

3) Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

a) on a : $x_n > 1$ et (x_n) croissante donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1 < x_1 \leq x_n < e$

d'où : $1 < \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n < e \Rightarrow 1 < \ell < e$

b) On a ; pour tout $n \in \mathbb{N}^* : f_n(x_n) = \sqrt{x_n} (\ln x_n)^n = 1$

Donc $(\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{x_n}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue en ℓ (car $\ell > 0$)

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$

Partie III :

On pose pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 dt$

1) a) La fonction $x \mapsto (f_1(t))^2$ est continue sur I ; car f_1 est continue sur I ; et comme $1 \in I$ alors F est dérivable sur I

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } F(x) &= \int_x^1 (f_1(t))^2 dt \sqrt{x_n} (\ln x_n)^n \\ &= \int_x^1 (\sqrt{t} \ln t)^2 dt \\ &= \int_x^1 t \ln^2(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u = \ln^2(t) & u' = \frac{2}{t} \ln(t) \\ v' = t & v = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int_x^1 t \ln^2(t) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \ln^2(t) \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2} \times \frac{2}{t} \ln(t) dt \\ &= -\frac{x^2 \ln^2(x)}{2} - \int_x^1 t \ln(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u = \ln(t) & u' = \frac{1}{t} \\ v' = t & v = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Alors : } \int_x^1 t \ln(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int_x^1 t \, dt \\
&= -\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^1 \\
&= -\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \\
&= -\frac{x^2 \ln(x)}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$D'où \quad F(x) = -\frac{x^2 \ln^2(x)}{2} - \left(-\frac{x^2 \ln(x)}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$Donc : \text{pour tout } x \in I, \quad \boxed{F(x) = -\frac{x^2 \ln^2(x)}{2} + \frac{x^2 \ln(x)}{2} + \frac{1}{4}(1 - x^2)}$$

$$2) a) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{(x \ln(x))^2}{2} + \frac{x^2 \ln(x)}{2} + \frac{1}{4}(1 - x^2) \right) = \frac{1}{4}$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0)$$

$$Donc \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{1}{4}}$$

b) Comme F est continue à droite en 0 (car F est continue sur $I = [0; +\infty[$) ; alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) ; \text{ par suite } \boxed{F(0) = \frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}
c) \text{ Soit } V \text{ le volume demandé ; alors : } V &= \int_0^1 \pi (f_1(t))^2 \, dt \\
&= \pi \int_0^1 (f_1(t))^2 \, dt \\
&= \pi F(0) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$Donc \quad \boxed{V = \frac{\pi}{4} \text{ cm}^3}$$

EXERCICE2 :

PARTIE I :

$$(S): \begin{cases} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = \frac{4}{5} \end{cases} ; (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$$

1- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution de (S) ; On pose : $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

$$\begin{aligned} \text{a) On a : } z + \frac{1}{z} &= \sqrt{x} + i\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x} + i\sqrt{y}} \\ &= \sqrt{x} + i\sqrt{y} + \frac{\sqrt{x} - i\sqrt{y}}{(\sqrt{x} + i\sqrt{y})(\sqrt{x} - i\sqrt{y})} \\ &= \sqrt{x} + i\sqrt{y} + \frac{\sqrt{x} - i\sqrt{y}}{x+y} \\ &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) + i\sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) \\ &= \frac{12}{5} + i\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + i\frac{4}{5}}$

b) D'après la question précédente on a : $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + i\frac{4}{5} \Leftrightarrow z^2 + 1 = \left(\frac{12}{5} + i\frac{4}{5}\right)z$

Car $z \neq 0$ (x et y ne peuvent pas être tous deux nuls)

D'où : $\boxed{z^2 - \left(\frac{12}{5} + i\frac{4}{5}\right)z + 1 = 0} \quad (E)$

c) On en déduit que (x,y) est solution de (S) ssi $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$ est solution de l'équation (E) .

Réolvons l'équation (E) .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Delta &= \left(\frac{12}{5} + i\frac{4}{5}\right)^2 - 4 \\ &= \frac{16}{25}(3+i)^2 - 4 \\ &= \frac{16}{25}(8+6i)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{28}{25} + \frac{96}{25}i \\
&= \left(\frac{2}{5}(4+3i) \right)^2 \\
D'où : z_1 &= \frac{\left(\frac{12}{5} + i\frac{4}{5} \right) + \frac{2}{5}(4+3i)}{2} \\
&= \frac{6}{5} + i\frac{2}{5} + \frac{1}{5}(4+3i) \\
&= \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \\
&= 2 + i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{\left(\frac{12}{5} + i\frac{4}{5} \right) - \frac{2}{5}(4+3i)}{2} \\
&= \frac{6}{5} + i\frac{2}{5} - \frac{1}{5}(4+3i) \\
&= \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i - \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \\
&= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i
\end{aligned}$$

Donc les valeurs de x et y sont : $\begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{2}{5} \\ \sqrt{y} = -\frac{1}{5} \end{cases}$ non valable car $\sqrt{y} \geq 0$

D'où $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Par suite le système (S) admet pour solution le couple $(4;1)$

PARTIE II :

1) Soit $z \in \mathbb{C}$; alors : $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1$
 $\Leftrightarrow z\bar{z}=1$
 $\Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

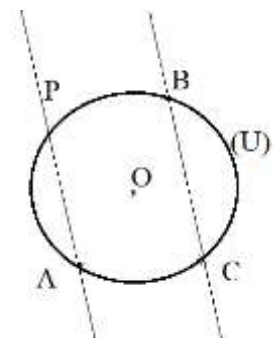
Donc $(\forall z \in \mathbb{C}) ; |z|=1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

2) a) Soit (Δ) la droite passant par A et parallèle à (BC)

On suppose que (Δ) n'est pas tangente au cercle (U)

elle coupe alors (U) en un point $P(p)$

$(AP) \parallel (BC)$; donc les points $A ; B ; C$ et P sont alignés



Alors $\frac{c-b}{p-a} \in \mathbb{R}$

D'où $\overline{\left(\frac{c-b}{p-a}\right)} = \frac{c-b}{p-a}$

Soit $\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{p}-\bar{a}} = \frac{c-b}{p-a}$ et on a : $|a|=|b|=|c|=|p|=1$; donc $\bar{a} = \frac{1}{a}$; $\bar{b} = \frac{1}{b}$; $\bar{c} = \frac{1}{c}$ et $\bar{p} = \frac{1}{p}$

Car $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $P(p)$ sont des points du cercle (U)

Donc $\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{a}} = \frac{c-b}{p-a} \Leftrightarrow \frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-p}{ap}} = \frac{c-b}{p-a}$

$$\Leftrightarrow \frac{b-c}{bc} \times \frac{ap}{a-p} = \frac{c-b}{p-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-b}{p-a} \times \frac{ap}{bc} = \frac{c-b}{p-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ap}{bc} = 1$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{bc}{a}$$

2ème Méthode

Si Δ n'est pas tangent à U

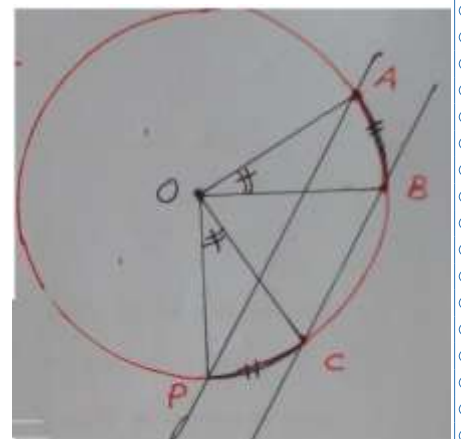
?? $(\vec{OA}; \vec{OB}) \equiv (\vec{OC}; \vec{OP}) \pmod{2\pi}$

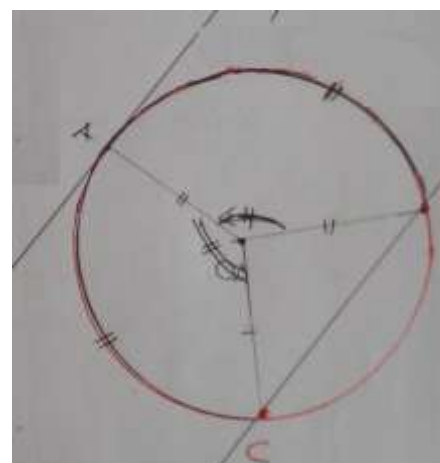
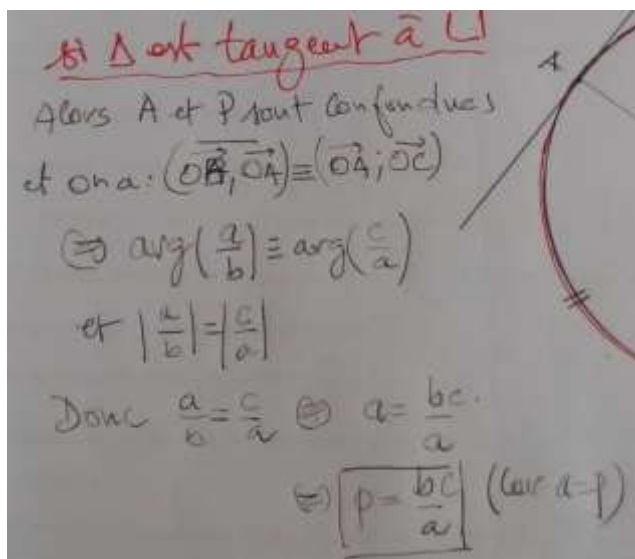
$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv \arg\left(\frac{p}{c}\right) \pmod{2\pi}$

et $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{p}{c}\right| = 1$

(Car A, B, C et P appartiennent au cercle U de rayon $r=1$)

Donc $\frac{b}{a} = \frac{p}{c} \Rightarrow \boxed{p = \frac{bc}{a}}$





b) On suppose que (Δ) passant par A et perpendiculaire à (BC) n'est pas tangente au cercle (U) ; elle coupe alors (U) en un point $Q(q)$

$$(AQ) \perp (BC) \text{ alors } \frac{c-b}{q-a} \in i\mathbb{R}$$

$$D'où \overline{\left(\frac{c-b}{q-a}\right)} = -\frac{c-b}{q-a} \text{ et } \bar{q} = \frac{1}{q}$$

$$\text{Donc } \frac{\bar{c} - \bar{b}}{\bar{q} - \bar{a}} = -\frac{c-b}{q-a}$$

$$\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{a}} = -\frac{c-b}{q-a} \Leftrightarrow \frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-q}{aq}} = -\frac{c-b}{q-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-c}{bc} \times \frac{aq}{a-q} = -\frac{c-b}{q-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{c-b}}{\cancel{q-a}} \times \frac{aq}{bc} = -\frac{\cancel{c-b}}{\cancel{q-a}}$$

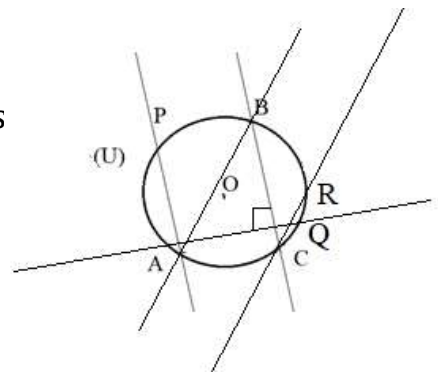
$$\Leftrightarrow \frac{aq}{bc} = -1$$

$$\Leftrightarrow q = -\frac{bc}{a}$$

Donc $q = -p$

c) On suppose que passant par C et parallèle à (AB) n'est pas tangente au cercle (U) ; elle coupe alors (U) en un point R(r)

(CR) || (AB) ; donc les points A ; B ; C et R sont alignés



$$\text{Alors } \frac{c-r}{b-a} \in \mathbb{R}$$

$$\text{D'où } \overline{\left(\frac{c-r}{b-a}\right)} = \frac{c-r}{b-a} \text{ et } \bar{r} = \frac{1}{r}$$

$$\text{Soit } \frac{\bar{c} - \bar{r}}{\bar{b} - \bar{a}} = \frac{c-r}{b-a}$$

$$\text{Donc } \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{c-r}{b-a} \Leftrightarrow \frac{\frac{r-c}{cr}}{\frac{a-b}{ab}} = \frac{c-r}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r-c}{cr} \times \frac{ab}{a-b} = \frac{c-r}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{c-b}}{\cancel{p-a}} \times \frac{ap}{bc} = \frac{\cancel{c-b}}{\cancel{p-a}} \Leftrightarrow \frac{\cancel{r-c}}{\cancel{a-b}} \times \frac{ab}{cr} = \frac{\cancel{c-r}}{\cancel{b-a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{cr} = 1$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{ab}{c}$$

2ème Méthode

A ; B et C jouent des rôles symétriques et d'après la question 2)a) en changeant A par C et (BC) par (AB) et P par R ; on obtient :

$$\frac{b-0}{p-r} = \frac{b}{\frac{bc}{a} - \frac{ab}{c}} = \frac{1}{\frac{c}{a} - \frac{a}{c}} = \frac{ac}{c^2 - a^2}$$

$$\begin{aligned} D'où \left(\overline{\frac{b-0}{p-r}} \right) &= \overline{\left(\frac{ac}{c^2 - a^2} \right)} = \frac{\overline{ac}}{\overline{c^2 - a^2}} = \frac{\frac{1}{a} \times \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{c} \right)^2 - \left(\frac{1}{a} \right)^2} \\ &= \frac{(ac)^2}{a^2 - c^2} = \frac{ac}{a^2 - c^2} = -\frac{b-0}{p-r} \end{aligned}$$

Alors $\frac{b-0}{p-r} \in i\mathbb{R}$; par suite $(OB) \perp (PR)$

Exercice 3

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1) On a :

•) $E \neq \emptyset$ ($I = M(1,1,0) \in E$) et $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

•) $(\forall (M(a,b,c); M(x,y,z)) \in E^2)$; alors : $-\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & -z \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$ est la symétrique de $M(x,y,z)$

$$\text{dans } (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +) ; \text{ et : } M(a,b,c) - M(x,y,z) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & -z \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-x & 0 & 0 \\ 0 & b-y & -(c-z) \\ 0 & c-z & b-y \end{pmatrix}$$

$$= M(a-x, b-y, c-z) \in E$$

$$(\text{car } (a-x, b-y, c-z) \in \mathbb{R}^3)$$

D'où E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

2) $(\forall ((x;z), (x';z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2)$; $(x;z) * (x';z') = (x+x'; z+z')$

$$(\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3) ; \varphi(M(a,b,c)) = (a, b+ci)$$

a) Soit $(M(a,b,c); M(x,y,z)) \in E^2$

$$\text{On a : } M(a,b,c) + M(x,y,z) = M(a+x, b+y, c+z)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \varphi(M(a,b,c) + M(x,y,z)) &= M(a+x, (b+y) + (c+z)i) \\ &= M(a+x, (b+ci) + (y+zi)) \\ &= M(a, (b+ci)) * M(x, (y+zi)) \\ &= \varphi(M(a,b,c)) * \varphi(M(x,y,z)) \end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$

De plus :

•) Soit $(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ avec $z = a+ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Donc } (x,z) = (x, a+ib) = \varphi(M(x,a,b))$$

D'où $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \subset \varphi(E)$

•) Soit $M(a,b,c) \in E$ alors $\varphi(M(a,b,c)) = (a, b+ci) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

Donc $\varphi(E) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

Par Suite : $\boxed{\varphi(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C}}$

b) Comme $(E, +)$ est un groupe commutatif alors $(\varphi(E), *)$ est un groupe commutatif. (par homomorphisme)

3) La loi T définie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$; par : $\left(\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2 \right) ;$

$$(x, z)T(x', z') = (x \operatorname{Re}(z') + x' \operatorname{Re}(z), zz')$$

a) Soit $((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2$; on a : $(x, z)T(x', z') = (x \operatorname{Re}(z') + x' \operatorname{Re}(z), zz')$

$$= (x' \operatorname{Re}(z) + x \operatorname{Re}(z'), z'z)$$
$$= (x', z')T(x, z)$$

Donc T est commutative dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

b) Pour tout $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$; on a : $(0, 1)T(x, z) = (x, z)T(0, 1)$

$$= (x \operatorname{Re}(1) + 0 \operatorname{Re}(z), z \times 1)$$
$$= (x, z)$$

Donc $(\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}) ; \boxed{(0, 1)T(x, z) = (x, z)T(0, 1) = (x, z)}$

D'où $(0, 1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$; on a :

•) $(1, i)T(x, -i) = (1 \operatorname{Re}(-i) + x \operatorname{Re}(i), -i \times i)$

$$= (0, 1)$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \boxed{(1, i)T(x, -i) = (0, 1)}$.

•) $((x, -i)T(1, i))T(1, i) = (0, 1)T(1, i)$

$$= (1, i)$$

et $(x, -i)T((1, i)T(1, i)) = (x, -i)T(0, -1)$

$$= (-x, i)$$

Donc $((x, -i)T(1, i))T(1, i) \neq (x, -i)T((1, i)T(1, i))$

D'où T n'est pas associative dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

4) $G = \{(Im(z), z) / z \in \mathbb{C}\}$

a) •) $G \neq \emptyset$ (car $(0, 1) \in G$ pour $z = 1$) et $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

•) Soit $((Im(z), z); (Im(z'), z')) \in G^2$.

$$(Im(z), z) * (-Im(z), -z) = (Im(z) + (-Im(z)), z + (-z)) \\ = (0, 0)$$

Et $(0, 0)$ est l'élément neutre pour $*$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

$$(car \varphi(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \text{ et } \varphi(M(0, 0, 0)) = (0, 0))$$

D'où $(-Im(z), -z)$ est le symétrique de $(Im(z), z)$ dans $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}; *)$

On a :

$$(Im(z), z) T (-Im(z'), -z') = (-Im(z) \times Re(-z') + (-Im(z') \times Re(z)), -zz') \\ = (-Im(z) \times Re(z') + Im(z') \times Re(z)), -zz') \\ = (Im(-zz'), -zz')$$

$$Car : \text{pour } z = x + iy \text{ et } z' = x' + iy' ; -zz' = -(x + iy)(x' + iy') \\ = -(xx' - yy') - i(x'y + xy')$$

$$\text{Donc } Im(-zz') = -(Im(z) \times Re(z') + Im(z') \times Re(z))$$

D'où $(G; *)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}; *)$

$$\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

$$b) \psi : z \mapsto (Im(z), z)$$

$$\text{Soit } (z; z') \in \mathbb{C}^2 ; z = x + iy \text{ et } z' = x' + iy' \text{ on a : } zz' = (xx' - yy') + i(x'y + xy')$$

$$\text{Donc } Im(z \times z') = (Im(z) \times Re(z') + Im(z') \times Re(z))$$

$$\text{Donc } \psi(z \times z') = (Im(z \times z'), z \times z') \\ = (Im(z), z) T (Im(z'), z') \\ = \psi(z) T \psi(z')$$

D'où ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}; T)$

$$c) \text{ Comme } (\forall (Im(z), z) \in G - \{(0, 0)\}) ; (\exists ! z \in \mathbb{C}^*) / (Im(z), z) = \psi(z)$$

$$\text{Donc } \psi(\mathbb{C}^*) = G - \{(0, 0)\}$$

Par suite par homomorphisme $(G - \{(0, 0)\}; T)$ est un groupe commutatif car $(\mathbb{C}^*; \times)$ est un corps commutatif.

5) •) $(G; *)$ est un corps commutatif dont l'élément neutre est $(0; 0)$.

•) $(G - \{(0, 0)\}; T)$ est un corps commutatif

•) Montrons que T est distributive par rapport à $*$ dans G .

Soient $(Im(z), z)$; $(Im(z'), z')$ et $(Im(z''), z'')$ trois éléments de G .

$$\begin{aligned} (Im(z), z)T((Im(z'), z') * (Im(z''), z'')) &= (Im(z), z)T((Im(z') + Im(z''), z' + z'')) \\ &= (Im(z) \times Re(z' + z'') + (Im(z') + Im(z'')) \times Re(z), z \times (z' + z'')) \\ &= (Im(z) \times Re(z') + Im(z) \times Re(z'') + Im(z') \times Re(z) + Im(z'') \times Re(z), (z \times z') + (z \times z'')) \\ &= ((Im(z) \times Re(z') + Im(z') \times Re(z)) + (Im(z) \times Re(z'') + Im(z'') \times Re(z)), (z \times z') + (z \times z'')) \\ &= ((Im(z), z)T(Im(z'), z')) * ((Im(z), z)T(Im(z''), z'')) \end{aligned}$$

Donc T est distributive par rapport à $*$ dans G .

Conclusion

$(G; *, T)$ est un corps Commutatif.

Exercice 4

On a : $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1}$ et p un nombre premier et q un nombre premier qui divise S .

1) a) Supposons que q divise p ; alors q divise $p + p^2 + \dots + p^{p-1}$

D'où q divise $S - 1$; alors $S \equiv 1[q]$ ce qui est absurde car q divise S .

Donc $\boxed{p \wedge q = 1}$

b) On a q premier et $p \wedge q = 1$ donc d'après le petit théorème de Fermat on a : $p^{q-1} \equiv 1[q]$

c) On a : $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1}$.

Donc S est la somme des p premiers termes d'une suite géométrique de raison p ; d'où

$$S = \frac{p^p - 1}{p - 1} \Rightarrow \boxed{p^p - 1 = (p - 1)S}$$

2) On suppose que $p \wedge (q - 1) = 1$.

a) On a : $p \wedge (q - 1) = 1$; d'après le théorème de Bezout $(\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2) / up + v(q - 1) = 1$

Et comme $p > 1$ et $(q - 1) > 1$; alors $(u \geq 0 \text{ et } v \leq 0)$ ou $(u \leq 0 \text{ et } v \geq 0)$

► Si $(u \geq 0 \text{ et } v \leq 0)$; alors $up = 1 + (-v)(q - 1)$ avec $u \in \mathbb{N}$ et $(-v) \in \mathbb{N}$

D'après 1)b) $p^{q-1} \equiv 1[q]$; donc $p^{(-v)(q-1)} \equiv 1[q]$

D'où $p^{1+(-v)(q-1)} \equiv p[q] \quad (1)$

D'après 1)c) $p^p \equiv 1[q]$ donc $p^{up} \equiv 1[q] \Rightarrow p^{1+(-v)(q-1)} \equiv 1[q] \quad (2)$

De (1) et (2) on déduit que : $p \equiv 1[q]$

► Si $(u \leq 0 \text{ et } v \geq 0)$; alors $v(q-1) = 1 + (-u)p$ avec $v \in \mathbb{N}$ et $(-u) \in \mathbb{N}$

D'après 1)c) $p^p \equiv 1[q]$; donc $p^{(-u)p} \equiv 1[q]$

D'où $p^{1+(-u)p} \equiv p[q]$ (1)

D'après 1)b) $p^{q-1} \equiv 1[q]$ donc $p^{v(q-1)} \equiv 1[q] \Rightarrow p^{1+(-u)p} \equiv 1[q]$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $p \equiv 1[q]$

b) On a : $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1}$ et $p \equiv 1[q]$

Donc $S \equiv \underbrace{1+1+\dots+1}_{p \text{ fois}}[q]$; d'où $S \equiv p[q]$

D'après 2)a) $p \equiv 1[q]$; alors $S \equiv 1[q]$

3) Supposons que $p \nmid q-1$ et comme p est premier ; alors $p \wedge (q-1) = 1$

Et d'après 2)b) $S \equiv 1[q]$; or $q \nmid S$ donc $S \equiv 0[q]$

Alors $1 \equiv 0[q]$ ce qui est absurde car q est premier donc $q > 1$

D'où $p \mid q-1$; alors $q \equiv 1[p]$