

Méthode
Signe d'une expression

Dans tout problème d'Analyse, il est au moins une fois question d'étudier le signe d'une expression $E(x)$ pour x variant dans un intervalle I de \mathbb{R} .

Par exemple :

- le sens de variation d'une fonction f sur I est parfaitement déterminé dès que l'on connaît le signe de sa dérivée f' sur I .
- la position, sur I , de la courbe représentative d'une fonction f par rapport à la courbe représentative d'une fonction g est bien déterminée dès que l'on connaît le signe de la différence $f(x) - g(x)$ sur I .
- pour démontrer un encadrement du type : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur I , il suffit de prouver que $f(x) - g(x) \geq 0$ et $f(x) - h(x) \leq 0$ pour tout x de I .

Différents cas peuvent être considérés, mais le premier renseignement à prendre en compte est l'intervalle I sur lequel porte l'étude.

1^{er} cas :

l' expression $E(x)$ est déjà écrite sous une forme directement exploitable.

A) **Le signe de $E(x)$ est, de manière évidente, constant sur I .**

Exemple 1

$$E(x) \text{ est définie dans } \mathbb{R} - \{-1\} \text{ par } E(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Il est évident que $E(x) > 0$ sur $] -\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty[$.

Exemple 2

$$E(x) \text{ est définie sur }]1 ; +\infty[\text{ par : } E(x) = -1 - \frac{1}{x-1}$$

Pour $x > 1$ on a : $x-1 > 0$ et donc $-\frac{1}{x-1} < 0$. Il est clair alors que $E(x)$, somme de deux termes strictement négatifs sur $]1 ; +\infty[$, est strictement négatif sur cet intervalle.

B) **Le signe de $E(x)$ dépend de celui d'un (ou +) de ses facteurs.**

Exemple 3

$$E(x) \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } E(x) = \frac{3(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

Le signe de $E(x)$ sur \mathbb{R} est le même que celui du polynôme du 1^{er} degré $2x+1$.

On en déduit:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$E(x)$	-	0	+

2nd cas :

le signe de $E(x)$ n'est pas immédiat.

Il faut alors essayer de transformer l'écriture de $E(x)$: en factorisant l'expression ou en utilisant l'expression conjuguée dans le cas de fonctions irrationnelles. Sinon l'étude des variations de la fonction E

permet de conclure dans de nombreux autres cas.

A) Il est possible de factoriser $E(x)$

Exemple 4

$E(x)$ est définie sur $]0; +\infty[$ par : $E(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$

Rappel :

réduire au même dénominateur, c'est aussi factoriser !

(on met alors en facteur l'inverse du dénominateur commun)

On peut écrire : pour $x > 0$, $E(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3} = \frac{(x+1)^2 (x-1)^2}{x^3}$

Il est clair que pour $x > 0$ le signe de $E(x)$ est celui de $(x-1)^2$, soit :

x	0	1	$+\infty$	
$E(x)$		+	0	+

Exemple 5

$E(x)$ est définie sur les intervalles $] -1; 0[$ et $] 0; +\infty[$

par $E(x) = \ln(x+1) - \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$

En factorisant, nous obtenons : $E(x) = \ln(x+1) \cdot \left(1 - \frac{x+1}{x}\right)$ puis $E(x) = -\frac{1}{x} \times \ln(x+1)$

Le signe de $-\frac{1}{x}$ est évident et $\ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Un tableau nous donne facilement le signe de $E(x)$.

x	-1	0	$+\infty$
$-\frac{1}{x}$		+	-
$\ln(x+1)$		-	+
$E(x)$		-	-

B) Utilisation de l'expression conjuguée de $E(x)$

Exemple 6

$E(x)$ est définie sur $] -\infty; -1[$ par : $E(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3} + x$

Multiplions et divisons $E(x)$ par son expression conjuguée $\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x$.

Notons que celle-ci est strictement positive si $x \geq -1$. En effet elle est la somme d'un nombre par définition positif (la racine carrée), et d'un nombre strictement positive: si $x \leq -1$ alors $-x > 0$.

Nous obtenons :

$$E(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x)(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x} = \frac{4x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x}$$

Compte tenu de la remarque initiale, on peut affirmer que le signe de $E(x)$ sur $]-\infty; -1]$ est celui du polynôme du 1^{er} degré $4x + 3$.

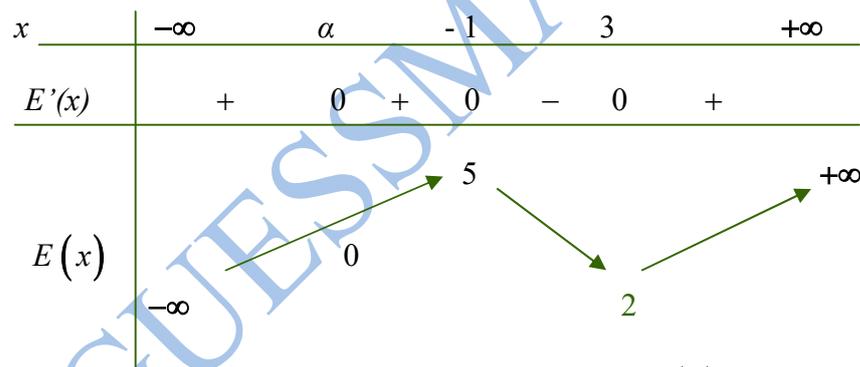
Or si $x \leq -1$ alors $4x \leq -4$ et $4x + 3 \leq -1$. Par suite $E(x) < 0$ sur $]-\infty; -1]$.

C) Utilisation des variations de la fonction E sur I .

Ce cas est très fréquent dans les problèmes du BAC : l'expression $E(x)$ n'est ni factorisable, ni transformable. L'étude des variations de la fonction E (que l'énoncé demande bien entendu) permet de déterminer le signe de $E(x)$.

Exemple 7

Les variations de la fonction E dérivable sur \mathbb{R} sont résumées dans le tableau suivant (α est un réel tel que $-2,7 \leq \alpha \leq -2,6$):



Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$ la fonction E est strictement croissante et $E(\alpha) = 0$.

Donc :

si $x < \alpha$ alors $E(x) < E(\alpha)$ soit $E(x) < 0$

si $-1 > x > \alpha$ alors $E(x) > E(\alpha)$ soit $E(x) > 0$

Sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ la fonction E admet un minimum égal à 2.

Donc pour $x \geq -1$ on a : $E(x) \geq 2$ soit $E(x) > 0$.

En résumé :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $E(x)$	$-$	0	$+$

NB: il existe bien entendu d'autres méthodes, adaptées à des situations bien particulières, et qui n'entrent pas dans le classement proposé ci-dessus. Mais l'énoncé donne alors toutes les explications nécessaires à l'obtention du résultat cherché.