Série n°28 Exercices sur « Etude de fonction Logarithme »

2éme Bac SM

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln^2 x-\ln x}-x}{x}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Etudier les branches infinies de (C_f).

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=e$ et à gauche en $x_0=1$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $D_f-\{1;e\}$ et $(\forall x\in D_f-\{1;e\})$;

$$f'(x)=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{2x^2\sqrt{\ln^2 x-\ln x}}$$

b) Etudier les variations de f ; puis dresser son tableau de variation.

c) Construire (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Montrer que f réalise une bijection de $]0;1]$ vers un intervalle J à déterminer.

5) Montrer que f^{-1} (fonctions réciproques de f) est dérivable en $\sqrt{2}$; puis calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$

6) Construire $(C_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1} ; dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 2

I - Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\ln(x^2)+\dfrac{1}{x}+1$

1) Etudier les variations de g ; puis dresser dan tableau de variations

2) Déterminer le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}^*$.

II- On considère la fonction f définie par : $f(x)=x\ln\left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$

3) a) Montrer que f est dérivable sur D_f et que : $(\forall x\in D_f)$; $f'(x)=g\left(\sqrt{x}-1\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse strictement supérieur à 1.

5) a) Etudier les branches infinies de (C_f)

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au pont d'abscisse $x_0=4$

6) Construire (C_f) et (T) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

WWW.GUESSMATHS.CO

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln x$

1) Montrer que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

2) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})\ (\exists! x_n\in \mathbb{R}_+^*)$; $f(x_n)=n$

3) a) Calculer x_1

b) Etudier la monotonie de la suite (x_n).

c) Déduire que (x_n) est divergente.

4) Etudier le signe de $f(n)-n$; puis déduire que : $(\forall n\in \mathbb{N}^*)$; $x_n\le n$.

5) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})$; $n-\ln(n)\le x_n$

6) a) Montrer que x_n peut s'écrire sous la forme : $x_n=n(1+a_n)$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

c) Déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n+\ln(n)-n)=0$

Exercice 4

I) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2-1-x\ln x & ;\ si\ x>0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 ;puis donner une interprétation géométrique au résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}

3) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle I à déterminer

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1} la fonction réciproque de f.

5) Soit $k\in \mathbb{N}$.

a) Montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique x_k dans $\mathbb{R}^+$.

b) Déterminer x_0 et vérifier que : $\frac{2}{3}<x_1<2$.

c) Donner l'expression de x_k en en fonction de f^{-1} ; puis montrer que la suite $(x_k)_{k\in \mathbb{N}}$ est croissante; puis déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$

6) Construire (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

II- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$;

et la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{3}{2} \\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases}$ $(\forall n\in \mathbb{N})$

1) Dresser le tableau de variations de g.

WWW.GUESSMATHS.CO

2) Montrer que : $g\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right)\subset\left[\frac{3}{2};2\right]$.(on prend $g\left(\frac{3}{2}\right)\simeq 1,73 ; g(2)\simeq 1,69$)

3) a) Dresser le tableau de variation de g'.

b) Déduire que : $\left(\forall x\in\left[\frac{3}{2};2\right]\right);\left|g'(x)\right|\leq\frac{2}{9}$

4) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $g(x)=x\Leftrightarrow f(x)=1$

b) Déduire que x_1 est l'unique solution de $g(x)=x$.

5) a) Montrer que : $\left(\forall n\in \mathrm{IN}\right)$; $\left|u_n-x_1\right|\leq\left(\frac{2}{9}\right)^n$.

6) Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in \mathrm{IN}}$ est convergente et calculer sa limite.

WWW.GUESSMATHS.CO