Exercice 1

Dans l'espace (E) muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; on considère la sphère (S) dont une équation cartésienne est : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$; soit le plan (P) d'équation cartésienne : $x+2y+2z+2=0$.

1) Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S).

2) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) au point $B(3;2;0)$.

4) Montrer que le plan (P) et le plan (Q) sont orthogonaux.

5) Soit (Δ) la droite qui passe par le point $C(1;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-2;1)$.

Montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; puis déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points différentes (il n'est pas demandé de déterminer leurs coordonnées).

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geq0}$ définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{3} \\ u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$; $n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<u_n<1$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq0}$ est croissante ; puis déduire qu'elle est convergente .

3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{1-u_n}{u_n}$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq0}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$; puis donner v_n en fonction de n.

b) Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=\frac{1}{1+2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$; et calculer; $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 3

Une urne contient : 6 boules Rouges qui portent toutes le numéro 1 et 4 boules Noirs dont 3 portent le numéro (-1) et une porte le numéro 1.
(Les boules sont indiscernables au toucher)
On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1) Montrer que le nombre de tirages possibles est 120.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A «Les trois boules tirées sont de même couleur »

B «Les trois boules tirées portent le même numéro »

3) Soit la variable aléatoire X qui lie chaque tirage au produit des numéros que portes les 3 boules tirées.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
4) On répète l'expérience précédente 4 fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.
Qu'elle est la probabilité d'obtenir l'événement A exactement 3 fois ?

Exercice 4

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$; on considère les points A ; B et C d'affixes respectifs $a=4-7i$; $b=4+7i$ et $c=-10-7i$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-8z+65=0$

2) a) Montrer que $\frac{c-b}{a-b}=1-i$; puis écrire le nombre complexe $\frac{c-b}{a-b}$ sous la forme trigonométrique.

b) Déduire que : $BC^2=2AB^2$ et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport (-2) ; et z l'affixe du point M du plan z' l'affixe du point M' image du point M par h.
a) Montrer que $z'=-2z+12-21i$
b) Déduire que l'affixe du point D image du point C par h est $d=32-7i$.

Exercice 5

Partie I

Soit la fonction g définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par : $g(x)=e^x-e+\ln x$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

2) Montrer que g est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$; puis dresser son tableau de variation.

3) Calculer $g(1)$; puis déduire que : $\left(\forall x\in\left]0;1\right]:g(x)\le0\right)$ et $\left(\forall x\in\left[1;+\infty\right[:g(x)\ge0\right)$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par : $\begin{cases}f(x)=e^x+x\ln x-(1+e)x-1\ ;\ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (On remarquera que $f(x)=x\left(\frac{e^x}{x}+\ln x-1-e-\frac{1}{x}\right)$)

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$; puis donner une interprétation géométrique au résultat.

2) Montrer que f est continue à droite en $x_0=0$.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$) ; puis donner une interprétation géométrique au résultat.

4) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right)$; $f'(x)=g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f.

5) Montrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique α telle que : $1<\alpha<2$ (on prend $f\left(2\right)\simeq0,34$).

6) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=\left[1;+\infty\right[$

Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

7) Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les deux courbe (C) et (C') celle de h^{-1} ; on prend $\alpha \simeq 1,92$.

8) Soit λ un réel de $]0,1[$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C) ; l'axe des abscisses et les droite d'équations $x=1$ et $x=\lambda$.

a) Montrer en utilisant une intégration par partie que $\int_{\lambda}^{1} x\ln x\,dx = \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda - \frac{1}{4}$

b) Montrer que : $A(\lambda) = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}\lambda^2(3+2e) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda + e^{\lambda}$

c) Déduire que : $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda) = \frac{11-2e}{4}$.