



Exercice 1

A) Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$; Interpréter graphiquement les résultats

2- Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \varphi'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

3- Dresser le tableau de variation de φ

4- Tracer la courbe (C) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; en précisant son intersection avec l'axe (Ox)

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction φ_n définie sur $] -n; +\infty[$ par : $\varphi_n(x) = \frac{1 + \ln(x+n)}{x+n}$

On désigne (C_n) sa courbe dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) En remarquant que : $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$.

Montrer que (C_n) est l'image de (C) de par une translation que l'on précisera

2) Tracer (C_1) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

C) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on considère la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$

1) Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; h_n(x) < 0$

2) Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; h'_n(x) < 0$

3) En déduire que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une solution unique ; α_n dans $]0; +\infty[$ telle que

$$\frac{1}{e} < \alpha_n < 1$$

4) a) Montrer que $n+1 + \alpha_{n+1} > n + \alpha_n$

b) Comparer $\varphi(\alpha_{n+1})$ et $\varphi(\alpha_n)$

c) Montrer que (α_n) est une suite convergente. On note ℓ sa limite

d) justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$

En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 02

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \ln x + x + 1$; $(\forall x \in]0; +\infty[)$

- 1) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$; et montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $0 < \alpha < \frac{1}{e}$
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$
b) Vérifier que : $f(\alpha) = -\alpha$; puis dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- 4) Tracer (C_f) (On donne $\alpha \approx 0,28$)

Parti C

Soit $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n dans $]0; +\infty[$
- 2) Montrer que : $f(e^n) < n$ et en déduire que : $x_n > e^n$; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$
- 3) Montrer que : $\ln\left(\frac{x_n}{e^n}\right) = \frac{n}{x_n}$; puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^n}$