Série n° 3 exercices corrigés sur les suites

guessmaths

Terminale S

Exercice 1

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_n = \sqrt{n+4}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

a. *Montrer que :* $u_n \geq 2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

b. *Montrer que :* $u_{n+1} \geq u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; puis déduire la monotonie de la suite.*

Correction

a. *Initialisation :*

Pour n=0 $u_0 = \sqrt{0+4} = 2$ *donc* $u_0 \geq 2$.

La propriété est initialisée.

Hérédité :

Supposons que $u_p \geq 2$ *avec* $p \in \mathbb{N}$ *(fixé) ; et montrons que* $u_{p+1} \geq 2$

Alors $u_p \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{p+4} \geq 2$.

$$\Leftrightarrow p+4 \geq 4$$

$$\Rightarrow p+1+4 \geq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(p+1)+4} \geq 2$$

$$\Rightarrow u_{p+1} \geq 2$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : $u_n \geq 2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

b. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $n+1 \geq n$

Donc $(n+1)+4 \geq n+4$

d'où $\sqrt{(n+1)+4} \geq \sqrt{n+4}$ *(car la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est croissante sur* $\mathbb{R}^+$*)*

Donc $u_{n+1} \geq u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a. Montrer que : $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. Etudier le signe de $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; puis déduire la monotonie de la suite.

Correction

a. Initialisation :

Pour n=1 $u_0 = -5$ et $u_1 = u_0^2 + 3u_0 = 25 - 15 = 10 \geq 0$ donc $u_1 \geq 0$.

Donc la propriété est initialisée au rang 1.

Hérédité :

Supposons que $u_p \geq 0$ $p \in \mathbb{N}$ (fixé) ; et montrons que $u_{p+1} \geq 0$

Alors d'après l'hypothèse de récurrence on a : $u_p \geq 0$

puis $\begin{cases} u_p \geq 0 \\ u_p + 3 \geq 0 \end{cases}$.

Donc $u_p(u_p + 3) \geq 0$

C'est-à-dire $u_p^2 + 3u_p \geq 0$. Soit $u_{p+1} \geq 0$.

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

b. pour tout $n \geq 1$; on a : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 3u_n - u_n$

$$= u_n^2 + 2u_n$$

Et d'après la question **a.** on a : $u_n \geq 0$; donc $u_n^2 + 2u_n \geq 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

De plus, $u_1 \geq u_0$.

On en déduit que la suite (u_n) *est croissante.*

Exercice 3

a. *Soit* (u_n) *la suite définie par :* $u_n = \sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Calculer la limite de la suite (u_n).

b. *Soit* (v_n) *la suite définie par :* $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Calculer la limite de la suite (v_n).

Correction

a. *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1}$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{n^2+4-\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+1}}$$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+1}\right) = +\infty$ *(par somme de limites)*

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

b. *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$$= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}$$

$$= \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

Et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = +\infty$ *(par somme de limites)*

D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$

Exercice 4

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_n = n^2 - n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

a. *Montrer que :* $u_n \geq n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

b. *Calculer la limite de la suite* (u_n).

Correction

a. *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $(n-1)^2 \geq 0$

donc $n^2 - 2n + 1 \geq 0 \Rightarrow n^2 - n + 1 \geq n$

$$\Rightarrow u_n \geq n$$

b. *On a :* $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ *; donc* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *par les théorèmes de comparaison.*

Exercice 5

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_0 = \frac{4}{3}$ *et* $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{10}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

On définit la suite (v_n) *par :* $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

a. *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique en précisant ça raison et son premier terme ; puis exprimer* v_n.

b. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ *; puis déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$

Correction

a. *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}$

$$= \frac{u_n + 3}{10} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3u_n + 9 - 10}{30}$$

$$= \frac{3u_n - 1}{30}$$

$$= \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{10} v_n$$

donc (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{10}$ *et de premier terme*

$v_0 = u_0 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:* $v_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$

b. *Or* $-1 < \frac{1}{10} < 1$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \frac{1}{3} = 0$

Par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$

Exercice 6

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(\dfrac{1}{5}\right)^k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

a. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $u_{n+1} - u_n > 0$ *; déduire que* (u_n) *est croissante.*

b. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;* $u_n = \dfrac{5}{4}\left(1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$ *; et* $u_n \leq \dfrac{5}{4}$ *; déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*

c. *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Correction

a. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n+1} \left(\dfrac{1}{5}\right)^k - \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(\dfrac{1}{5}\right)^k$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \cancel{\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{5}\right)^k} - \cancel{\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{5}\right)^k}$$

Et $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} > 0$ *; donc la suite* (u_n) *est croissante.*

b. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n+1} \left(\dfrac{1}{5}\right)^k$

$$= \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Et $1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} \leq 1$

Donc $u_n \leq \dfrac{5}{4}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; d'où la suite* (u_n) *est croissante majorée par* $\dfrac{5}{4}$ *alors elle est convergente.*

c. *On a :* $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$ *; donc* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ *d'où* $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{5}{4}}$

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a. Montrer que : $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. Montrer que : $0 \le u_n \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = 1 - \frac{2}{x+3}$

Étudier les variations de f.

d. Montrer par récurrence que : $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; puis déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

e. Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Correction

a. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$

$$= \frac{u_n + 3 - 2}{u_n + 3}$$

$$= 1 - \frac{2}{u_n + 3}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n + 3}$

b. Montrons par récurrence que : $0 \le u_n \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

On a pour n=0 ; $u_0 = 1$ alors $0 \le u_0 \le 1$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité :

Soit p un entier naturel fixé ; Supposons que $0 \le u_p \le 1$ et montrons que $0 \le u_{p+1} \le 1$.

Par hypothèse de récurrence on a : $0 \le u_p \le 1$

Alors $3 \le u_p + 3 \le 4$

Puis $\frac{1}{4} \le \frac{1}{u_p + 3} \le \frac{1}{3}$.

Puis $1 - \frac{1}{3} \le 1 - \frac{1}{u_p + 3} \le 1 - \frac{1}{4}$.

C'est-à-dire $\frac{2}{3} \le u_{p+1} \le \frac{3}{4}$.

D'où $0 \le u_{p+1} \le 1$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : $0 \le u_n \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $f(x) = 1 - \frac{2}{x+3}$; $(\forall x \in [0;1])$

f est dérivable sur $[0;1]$ en tant que fonction rationnelle.

Et pour tout $x \in [0;1]$ on a : $f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$.

Alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0;1]$; donc f est strictement croissante sur $[0;1]$.

d. Initialisation :

On a : $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $u_0 > u_1$. La propriété est initialisée.

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$ Supposons que $u_p > u_{p+1}$ et montrons que : $u_{p+1} > u_{p+2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $u_p > u_{p+1}$*, f est strictement croissante sur* $[0;1]$*. et* $u_n \in [0;1]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a donc* $f(u_p) > f(u_{p+1})$*, soit* $u_{p+1} > u_{p+2}$.

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion *: D'où* $u_n > u_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Donc (u_n) *est strictement décroissante et comme elle est minorée par* 0 *; elle est donc convergente.*

d. *Si* $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$ *; alors* l *est solution de l'équation* $f(l) = l$ *; c à d* $l = 1 - \frac{2}{l+3}$

Donc $\frac{2}{l+3} = 1 - l \Leftrightarrow (1-l)(l+3) = 2$

$$\Leftrightarrow l + 3 - l^2 - 3l = 2$$

$$\Leftrightarrow -l^2 - 2l + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 + 2l - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 + 2l + 1 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (l+1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow l + 1 = \sqrt{2} \ \ ou \ \ l + 1 = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow l = \sqrt{2} - 1 \ ou \ l = -1 - \sqrt{2}$$

Or $0 \le u_n \le 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Donc $0 \le l \le 1$ *; c à d* $l = \sqrt{2} - 1$

D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2} - 1$