EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

On note C_f *sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

1. f est-elle continue sur IR ?
2. f est-elle dérivable sur IR ?
3. Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{x}{x^2+1}<\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

5. En déduire le sens de variation de f sur IR et dresser son tableau de variations.
6. Donner les équations des demi-tangentes à la courbe C_f *au point d'abscisse 0.*
7. Tracer la courbe C_f *.*

CORRECTION :

f est la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

1. Etude de la continuité de f :

Pour $x\neq 0$, $f(x)=x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

f est le produit des fonctions $x\mapsto x$ *et de* $x\mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. *La fonction* $x\mapsto\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ *est la composée de* $x\mapsto\frac{1}{x}$ *continue sur* IR^* *et de* $x\mapsto\arctan(x)$ *continue sur* IR^*. *Donc par composition,* $x\mapsto\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ *est continue sur* IR^*.

Comme la fonction $x\mapsto x$ *est continue sur* IR^*, *alors par produit f est continue sur* IR^*.

Pour $x=0$ *:*

F est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

La fonction $x\mapsto\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ *est la composée de* $x\mapsto\frac{1}{x}$ *et de* $X\mapsto\arctan(X)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\mp\infty$ *selon que x tende vers 0 par la droite ou par la gauche, alors il convient de considérer ces deux cas séparément.*

Cas N° 1 : x est strictement positif

On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$ *, on peut donc écrire* $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\arctan(X)=\frac{\pi}{2}$ *par composition avec* $X=\frac{1}{x}$.

D'où par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

<u>*Cas N° 2 : x est strictement négatif*</u>

De la même manière que pour le cas N° 1, on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ *, on peut donc écrire* $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to -\infty} \arctan(X) = \dfrac{\pi}{2}$ *par composition avec* $X = \dfrac{1}{x}$.

D'où par produit, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

Les deux limites de f à gauche et à droite de 0 existent et sont égales à f(0). On en déduit que f est continue en zéro et $f(0) = 0$ *.*

2. Etude de la dérivabilité de f :

<u>*Pour* $x \neq 0$</u>, $f(x) = x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *:*

f est le produit des fonctions $x \mapsto x$ *et de* $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La fonction $x \mapsto x$ *est la composée de* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *dérivable sur* IR^* *et de* $x \mapsto \arctan(x)$ *dérivable sur* IR^*.

Donc par composition, $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *est dérivable sur* IR^*.

Comme la fonction $x \mapsto x$ *est dérivable sur* IR^**, alors par produit f est dérivable sur* IR^*.

<u>*Pour x=0*</u> *:*

f est dérivable en 0 si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *admet une limite finie lorsque x tend vers 0.*

Soit x un réel de IR^**. On a:* $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ *ont été calculées dans la question 1.*

Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0 (limite à droite de 0 différente de la limite à gauche de 0), par conséquent f n'est pas dérivable en 0.*

En revanche, comme les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *existent et valent respectivement* $\dfrac{\pi}{2}$ *et* $-\dfrac{\pi}{2}$*, alors f est dérivable à droite de 0 et à gauche de 0.*

3. *Déterminer la limite :* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Soit x un réel strictement positif (ici on est au voisinage de $+\infty$ *) :*

On a, $f(x) = x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$

Cette écriture suggère de procéder par changement de variable en posant $u = \dfrac{1}{x}$*, ainsi lorsque x tend* vers $+\infty$, u tend vers 0 par la droite et on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{u\to0^+} \frac{\arctan(u)}{u}$$
$$=1$$

C'est en effet une limite connue et selon le contexte, vous pouvez soit donner le résultat directement soit le démontrer.

Voici une proposition de démonstration : $\lim_{x\to0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ *où* $g(x)=\arctan(x)$. *Or g est dérivable sur IR et en particulier en 0, donc le taux d'accroissement* $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ *admet une limite finie en 0 et on a,* $\lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$

$$= \frac{1}{1+0^2}$$
$$=1$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *existe et est égale à 1. Géométriquement, on dit que la courbe* C_f *admet une asymptote horizontale d'équation* $y=1$.

4. Montrer que pour tout réel x **strictement positif, on a :** $\frac{x}{x^2+1} < \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Posons g la fonction définie sur IR_+^* *par :* $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Pour montrer l'inégalité demandée, il suffit de montrer que pour tout réel x dans IR_+^*, $g(x)<0$.
La connaissance des variations de g permet de répondre à cette question.
g est dérivable sur IR_+^* *comme somme de deux fonctions dérivables sur* IR_+^* *et pour tout réel x strictement positif, on a :* $g'(x) = \frac{1\times(x^2+1)-2x\times x}{(x^2+1)^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-\cancel{x^2}+1+\cancel{x^2}}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

Donc pour tout réel x strictement positif, $g'(x)>0$ *et g est strictement croissante sur* IR_+^*.

Par ailleurs, $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{x^2+1} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$ *(car* $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=0$ *et* $\lim_{x\to0^+}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ *)*

d'après la question 1, on en déduit que, $\lim_{x\to0^+} g(x) = -\frac{\pi}{2}$ *Et* $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ *car,* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=0$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=0$ *)*

Comme g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur IR_+^*, alors $g\left(IR_+^*\right)=\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ et pour tout réel x strictement positif, on a $g(x)<0$ et par suite $\frac{x}{x^2+1}<\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Remarque :

Comme on sait que g est continue et strictement croissante sur IR_+^*, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ aura suffi pour conclure.

5. Tableau de variations de f sur IR :

Pour connaître les variations de f sur IR, il faudra commencer par déterminer la dérivée de f puis étudier son signe.

f est dérivable sur IR_+^* (voir question 2) et pour tout réel x de IR_+^* on a :

$$f'(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+x\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{x^2+1}$$

On déduit grâce à la question précédente que pour tout réel x dans IR_+^*, $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur IR_+^*.

Par ailleurs, f est paire car,

La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est impaire et la fonction $x\mapsto\arctan(x)$ est impaire, donc par composition, la fonction $x\mapsto\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est impaire.

f est définie sur IR et $\forall x\in IR$, on a $(-x)\in IR$.

Soit $x\in IR$, on a : $f(-x)=-x\arctan\left(-\frac{1}{x}\right)$

$$=-x\times-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=f(x)$$

f est paire donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Puisque f est strictement croissante sur IR_+^*, alors par symétrie, f est strictement décroissante sur IR_-^* et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	1 ↘	0	↗ 1

6. Équations des demi-tangentes à la courbe C_f au point d'abscisse 0 :

On a vu à la question 2 que f est dérivable à droite de 0 et à gauche de 0 mais pas en 0. La courbe C_f admet deux demi-tangentes de part et d'autres de 0.

Une équation de la demi-tangente à C_f à droite de 0 est donnée par : $y=\frac{\pi}{2}x$

Une équation de la demi-tangente à C_f *à gauche de 0 est :* $y = -\frac{\pi}{2}x$.

7. Représentation graphique de la courbe C_f **:**