Exercice 1

Soit $a \in]0,\pi[$. *Démontrer que pour tout* $n \geq 1$; $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$.

Corrigé

On va démontrer la formule par récurrence sur n. Notons (P_n) *la propriété*

$$(P_n) : "\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}"$$

Initialisation *: On a* $\sin(a) = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$

ce qui prouve que (P_1) *est vraie.*

Hérédité *: Soit* $n \in \mathbb{N}$

Supposons que (P_n) *est vraie, et montrons que* (P_{n+1}) *est vraie.*

Sachant que : $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$

Alors :
$$\frac{\sin(a)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$$
$$= \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$

Ainsi (P_{n+1}) *est vraie.*

Conclusion :

$(P_n) : "\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}"$ *est vraie pour tout* $n \geq 1$.

Exercice 2

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \mapsto \frac{1}{i}z$ **2.** $z \mapsto z+(2+i)$

3. $z \mapsto (1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}(1-i)$ **4.** $z \mapsto (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha$, *où* $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Corrigé

1. *On écrit* $\frac{1}{i}z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, *et on remarque que l'on a affaire à une rotation* de centre O l'origine du repère et *d'angle* $-\frac{\pi}{2}$.

2. Soit $M(z) \mapsto M'(z') \Leftrightarrow z' = z+(2+i)$

$$\Leftrightarrow z'-z = (2+i)$$

$$\Leftrightarrow MM' = \vec{u} \quad \text{(Où } \vec{u} \text{ est le vecteur d'affixe } (2+i)\text{)}$$

On a ici l'écriture d'une translation de vecteur $\vec{u}$.

3. $z \mapsto (1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}(1-i)$

Cherchons ω *le point fixe par cette application.*

$$\omega \mapsto (1+i\sqrt{3})\omega+\sqrt{3}(1-i) \Leftrightarrow \omega = (1+i\sqrt{3})\omega+\sqrt{3}(1-i)$$

$$\Leftrightarrow -i\omega\sqrt{3} = \sqrt{3}(1-i)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{3}(1-i)}{-i\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{i\sqrt{3}\sqrt{3}(1-i)}{-i\sqrt{3}\times i\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \omega = 1+i$$

Donc $\begin{cases} z = (1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}(1-i) \\ \omega = (1+i\sqrt{3})\omega+\sqrt{3}(1-i) \end{cases} \Rightarrow z-\omega = (1+i\sqrt{3})(z-\omega)$

$$\Rightarrow z-\omega = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-\omega)$$

$$\Rightarrow z-\omega = 2(z-\omega)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc l'application est le composée d'une translation de centre $\omega(1+i)$ d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'une homothétie de centre O et de coefficient $k=2$.

4. $z \mapsto (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha$, où $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Cherchons ω le point fixe par cette application.

On a : $\omega \mapsto (1+i\tan\alpha)\omega - i\tan\alpha \Leftrightarrow \omega = (1+i\tan\alpha)\omega - i\tan\alpha$

$$\Leftrightarrow (\omega - 1)i\tan\alpha = 0$$

On distingue deux cas :

1^er^ Cas

$\alpha = 0$; donc $z \mapsto z$ d'où il s'agit de l'identité.

2^éme^ Cas

$\alpha \neq 0$; $\omega = 1$

On a : $\begin{cases} z = (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha \\ \omega = (1+i\tan\alpha)\omega - i\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow z - \omega = (1+i\tan\alpha)(z-\omega)$

Et $1+i\tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}$$

D'où $z = (1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha \Rightarrow z - \omega = \frac{1}{\cos\alpha}(z-\omega)e^{i\alpha}$

Donc l'application est le composée d'une translation de centre $\omega(1)$ d'angle α et d'une homothétie de centre O et de coefficient $k = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Exercice 6

Soit α un nombre complexe de module 1 et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $z^n = \alpha$. Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont

$(1+z_1)^n, (1+z_2)^n, \ldots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Corrigé

Posons $\alpha = e^{i\theta}$. Alors les racines de $z^n = \alpha$ sont données par $z_k = e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$

On a : $1+z_k = e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)}$$

Donc $\left(1+z_k\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)}$

On conclut que tous les points d'affixe $\left(1+z_k\right)^n$ sont donc situés sur la droite qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses. Ainsi, ils sont alignés.

Exercice 8

Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

Démontrer que A, B et C sont aligné si et seulement si $\left(a\bar{b}+b\bar{c}+c\bar{a}\right)\in\mathbb{R}$.

Corrigé

On peut supposer que les 3 points sont distincts deux à deux (sinon la relation est trivialement vérifiée).

Dire que A, B et C sont alignés signifie qu'il existe un réel λ tel que : $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$

Autrement dit, avec les notations précédents, A, B et C sont alignés si et seulement il existe un réel λ tel que : $c-a=\lambda(b-a)$ *c'est-à-dire si et seulement* $\frac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R}$ *si (b−a)/(c−a)*

On a : $\frac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)\equiv 0[2\pi]$

$$\Leftrightarrow arg(b-a)-arg(c-a)\equiv 0[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg(b-a)+arg\left(\overline{c-a}\right)\equiv 0[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left((b-a)\left(\overline{c-a}\right)\right)\equiv 0[2\pi]$$

On pose $u=b-a$ et $v=c-a$

$$\Leftrightarrow \left(u\bar{v}\right)\in\mathbb{R}$$

On a : ► $a\bar{b} = a\bar{a}+a\bar{u} = |a|^2+a\bar{u}$

► $b\bar{c} = a\bar{a}+\bar{a}(b-a)+a\left(\bar{c}-\bar{a}\right)+(b-a)\left(\bar{c}-\bar{a}\right)$

$$=|a|^2+\bar{a}u+a\bar{v}+u\bar{v}$$

$$\blacktriangleright\ c\bar{a}=a\bar{a}+\bar{a}(c-a)=|a|^2+\bar{a}v$$

Donc $a\bar{b}+b\bar{c}+c\bar{a}=|a|^2+a\bar{u}+|a|^2+\bar{a}u+a\bar{v}+u\bar{v}+|a|^2+\bar{a}v$

$$=3|a|^2+(a\bar{u}+\bar{a}u)+(a\bar{v}+\bar{a}v)+u\bar{v}$$

$$=3|a|^2+2Re(a\bar{u}+a\bar{v})+u\bar{v}$$

D'où $\left(a\bar{b}+b\bar{c}+c\bar{a}\right)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow u\bar{v}\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\frac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow c-a=\lambda(b-a)$$

$$\Leftrightarrow A,B\,et\,C\ sont\ alignés$$