

guessmaths

Correction Examen nationale 2020 Session de Rattrapage

2ème Bac SM A et B

Exercice 1 :

$$\begin{aligned}
 1- a) \text{ Soit } d = p \wedge 9 &\Rightarrow d \mid p \text{ et } d \mid 9 \text{ et } 9^{q+p-1} \equiv 1 \text{ pq} \Rightarrow pq \mid 9^{q+p-1} - 1 \\
 &\Rightarrow d \mid 9^{q+p-1} - 1 \\
 &\Rightarrow d \mid 1 \\
 &\Rightarrow d = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } p \wedge 9 = 1$$

$$b) \begin{cases} p \text{ est premier} \\ p \wedge 9 = 1 \end{cases} \Rightarrow 9^{p-1} \equiv 1 \text{ p ; d'après le petit Théorème de FERMET}$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a aussi : } 9^{q+p-1} &\equiv 1 \text{ pq} \Rightarrow pq \mid 9^{q+p-1} - 1 \\
 &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid 9^{q+p-1} - 1 = kpq \\
 &\Rightarrow \exists k' = kq \in \mathbb{Z} \mid 9^{q+p-1} - 1 = k'p \\
 &\Rightarrow p \mid 9^{q+p-1} - 1 \\
 &\Rightarrow 9^{q+p-1} \equiv 1 \text{ p} \\
 &\Rightarrow 9^q \cdot 9^{p-1} \equiv 1 \text{ p} \quad 1
 \end{aligned}$$

$$\text{De plus } 9^{p-1} \equiv 1 \text{ p} \Rightarrow 9^q \cdot 9^{p-1} \equiv 9^q \text{ p} \quad 2$$

$$1 \text{ et } 2 \Rightarrow 9^q \equiv 1 \text{ p}$$

$$2- a) \text{ Soit } d = p-1 \wedge q ; \text{ donc } d \mid q \text{ et } q \text{ premier alors } d \in 1, q$$

$$\text{On suppose } d = q$$

$$\text{On a : } q \mid p-1 \quad 1 \text{ et } p < q \quad 2$$

$$\text{Donc } p < q < p-1 \Rightarrow p < p-1 \Rightarrow 0 < -1 ; \text{ ce qui est absurde}$$

$$\text{Par suite } d = 1 ; \text{ d'où } p-1 \wedge q = 1$$

$$b) \text{ On a : } p-1 \wedge q = 1 ; \text{ donc d'après BEZOUT : } \exists a, b \in \mathbb{N} \mid aq - b(p-1) = 1$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \begin{cases} 9^q \equiv 1 \text{ p} \\ 9^{p-1} \equiv 1 \text{ p} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1 \text{ p} \\ 9^{b(p-1)} \equiv 1 \text{ p} \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1 \text{ p} \\ 9^{bp-1} \equiv 1 \text{ p} \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1 \text{ p} \\ 9^{bp-1+1} \equiv 9 \text{ p} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9^{pq} \equiv 1 \text{ } p \\ 9^{pq} \equiv 9 \text{ } p \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9 \equiv 1 \text{ } p$$

$$\Rightarrow p \mid 8$$

$$\Rightarrow p \in \{1; 2; 4; 8\}$$

Or p est premier donc $p = 2$

$$c) \begin{cases} q \text{ est premier} \\ q \wedge 9 = 1 \end{cases} \Rightarrow 9^{q-1} \equiv 1 \text{ } q ; \text{ d'après le petit Théorème de FERMET}$$

$$d) \text{ On a : } \exists k \in \mathbb{Z} / 9^{p+q-1} - 1 = kpq \Rightarrow \exists k' = kp \in \mathbb{Z} / 9^{p+q-1} - 1 = k'q \\ \Rightarrow 9^{p+q-1} \equiv 1 \text{ } q$$

$$\text{Donc } \begin{cases} 9^{q-1} \equiv 1 \text{ } q \\ 9^{p+q-1} \equiv 1 \text{ } q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9^{q-1} \equiv 1 \text{ } q \\ 9^2 \cdot 9^{q-1} \equiv 1 \text{ } q \end{cases} \quad (\text{car } p = 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9^2 \cdot 9^{q-1} \equiv 9^2 \text{ } q \\ 9^2 \cdot 9^{q-1} \equiv 1 \text{ } q \end{cases} \Rightarrow 9^2 \equiv 1 \text{ } q$$

$$\Rightarrow q \mid 80$$

$$\Rightarrow q \in \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80\} \text{ et } q \text{ premier}$$

$$\Rightarrow q \in \{2; 5\} \text{ et } q > p = 2$$

Donc $q = 5$

Exercice 2 :

Partie I

1- a) Soient A et B deux éléments de E ; et α un réel.

$$\text{On a : } \alpha A + B = \alpha \begin{pmatrix} x & -y & -z \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -y' & -z' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x + x') & -(\alpha y + y') & -(\alpha z + z') \\ 0 & (\alpha z + z') & 0 \\ (\alpha y + y') & (\alpha x + x') - (\alpha z + z') & (\alpha x + x') \end{pmatrix}$$

$$= M((\alpha x + x'); (\alpha y + y'); (\alpha z + z'))$$

Car $((\alpha x + x'); (\alpha y + y'); (\alpha z + z')) \in \mathbb{R}^3$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall (A; B) \in E^2) : \alpha A + B \in E$$

Donc E est un sous espace vectoriel de l'espace $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$

$$\begin{aligned} b) M(x; y; z) &= \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & -z & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= xU + yV + zW \end{aligned}$$

Donc $(U; V; W)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $(E, +, \times)$

Soit $(\alpha U + \beta V + \gamma W = O)$ une combinaison linéaire nulle des éléments $u; v$ et w .

$$\begin{aligned} \alpha U + \beta V + \gamma W = O &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & \alpha - \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

Donc la seule combinaison linéaire de $(U; V; W)$ qui soit nulle est celle pour laquelle $\alpha = \beta = \gamma = 0$; d'où $(U; V; W)$ est une famille libre.

2- a) Soient $M(x; y; z)$ et $M(x'; y'; z')$ deux éléments de E ; on a :

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \times M(x'; y'; z') &= \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (xx' - yy') & (-xy' - yz' - yx' + yz') & (-xy' - yx') \\ 0 & zz' & 0 \\ (y'x + xy') & (-yy' + xz' - zz' + xx' - xz') & (-yy' + xx') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (xx' - yy') & -(xy' + yx') & -(xy' + yx') \\ 0 & zz' & 0 \\ (xy' + y'x) & ((xx' - yy') - zz') & (xx' - yy') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= M((xx' - yy'); (xy' + yx'); zz')$$

$$\text{Alors } M(x; y; z) \times M(x'; y'; z') = M((xx' - yy'); (xy' + yx'); zz')$$

b) $(E, +, \times)$ est un espace vectoriel réel ; donc $(E, +)$ est un groupe commutatif.

On a aussi $\times$ est associative dans E (car $E \subset M_3(\mathbb{R})$) et $\times$ est associative dans $M_3(\mathbb{R})$

Et comme $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $M_3(\mathbb{R})$; $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E (car $E \subset M_3(\mathbb{R})$).

Donc $(E, +, \times)$ est un anneau de plus il est commutatif ; soient $M(x; y; z)$ et $M(x'; y'; z')$

deux éléments de E ; on a : $M(x; y; z) \times M(x'; y'; z') = M((xx' - yy'); (xy' + yx'); zz')$

$$= M((x'x - y'y); (x'y + y'x); z'z)$$

$$= M(x'; y'; z') \times M(x; y; z)$$

c) On montre d'abord que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ vers F^* .

Soit $M(a; b; 0)$ une matrice donnée de F^* .

Et on résout dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\varphi(z) = M(a; b; 0)$; on a :

$$\varphi(z) = M(a; b; 0) \Leftrightarrow \varphi(x + iy) = M(a; b; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & a & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = a \text{ et } y = b$$

$$\text{D'où } (\forall M(a; b; 0) \in F^*) (\exists! (z = a + ib) \in \mathbb{C}^*) / \varphi(z) = M(a; b; 0)$$

Donc φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ vers F^* .

De plus soient $((z = x + iy), (z' = x' + iy')) \in (\mathbb{C}^*)^2$; on a :

$$\varphi(z) \times \varphi(z') = M(x; y; 0) \times M(x'; y'; 0)$$

$$= M((xx' - yy'); (xy' + yx'); 0)$$

$$\text{Et } z \times z' = (x + iy) \times (x' + iy')$$

$$= (xx' - yy') + i(xy' + yx')$$

$$\text{Donc } \varphi(z \times z') = M((xx' - yy'); (xy' + yx'); 0)$$

$$\text{D'où } \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$$

Par suite φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(F^*, \times)$. Comme φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ vers F^* .

Alors φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(F^*, \times)$.

On a : $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif ; φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(F^*, \times)$ et $\varphi((\mathbb{C}^*, \times)) = (F^*, \times)$; donc $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Comme $(1+i0)$ est l'élément neutre pour $(\mathbb{C}^*, \times)$; alors $\varphi(1+i0) = M(1;0;0)$ est l'élément neutre pour le groupe $(F^*, \times)$; de plus $Sym_{\mathbb{C}^*}(x+iy) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} \right)$

$$\begin{aligned} \text{Alors } Sym_{F^*}(M(x;y;0)) &= Sym_{F^*}(\varphi(x+iy)) \\ &= \varphi(Sym_{\mathbb{C}^*}(x+iy)) \\ &= \varphi\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}\right) \\ &= M\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}, 0\right) \end{aligned}$$

d) • $(F, +)$ est un groupe commutatif

• $(F^*, \times)$ est un groupe

• $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

• $\times$ est commutative dans $F \subset E$

Donc $(F, +, \times)$ est un corps commutatif ; $M(1;0;0)$ est l'unité du corps $(F, +, \times)$ est l'élément neutre de la loi $\times$ dans F à savoir $M(1;0;0)$.

$$3- a) \text{ Soit } M(x;y;0) \in F ; \text{ On a : } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Supposons qu'il existe un élément $M(x;y;0) \in F$ inversible dans F et que $M^{-1}(x;y;0)$ est son inverse dans $(F^*, \times)$; on a :

$$M^{-1}(x; y; 0) \times M(x; y; 0) = I$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M^{-1}(x; y; 0) \times M(x; y; 0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ce qui est absurde ; d'où aucun élément de } F \text{ n'est inversible}$$

pour la loi de multiplication des matrices $\times$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2ème méthode

D'après la question précédente on a : $(\forall x \in M(x; y; 0) \in F)$; On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \text{ donc tout élément de } F \text{ est un diviseur de la}$$

matrice nulle dans $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; d'où tout élément de F est non inversible pour la loi de multiplication des matrices $\times$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :

$$(E) : z^2 + 2z + m^2 + 1 = 0$$

I- 1- Le discriminant de (E) est : $\Delta = 2^2 - 4(m^2 + 1) = (2m)^2$

Donc les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{-2 + 2m^2}{2} = -1 + im$ et $z_2 = -1 - im$

$$D'où S_{(E)} = \{-1 - im; -1 + im\}$$

2- a) Supposons que l'équation $(F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$ admet une solution imaginaire pure αi ; alors on a :

$$(\alpha i)^3 + 2(1-i)(\alpha i)^2 + (1+m^2-4i)\alpha i - 2i(1+m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^3 i - 2\alpha^2 + 2\alpha^2 i + \alpha i + m^2 \alpha i + 4\alpha - 2i - 2m^2 i = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(\alpha - 2)\alpha - ((\alpha - 2)\alpha^2 - (\alpha - 2) + m^2(\alpha - 2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(\alpha - 2)\alpha - (\alpha^2 + m^2 - 1)(\alpha - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + m^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + m^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 2) = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 + 2\alpha + m^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 2$$

Donc $2i$ est une solution imaginaire de l'équation (F).

b) On remarque que : $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow z^3 - 2iz^2 + 2z^2 - 4iz + m^2z - 2im^2 + z - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 2i)z^2 + 2z(z - 2i) + m^2(z - 2i) + z - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 + 2z + m^2 + 1) = 0$$

Donc pour déterminer les autres solutions ; on résout l'équation $z^2 + 2z + m^2 + 1 = 0$

D'après la question 1- les solutions sont : $z_1 = \frac{-2 + 2m^2}{2} = -1 + im$ et $z_2 = -1 - im$; D'où

$$S_{(F)} = \{2i; -1 - im; -1 + im\}$$

II- 1- • Ω est milieu du segment $[AB] \Rightarrow z_{\Omega} = \frac{z_A + z_B}{2} = -1$

• P image de A par la rotation $r_1 \Rightarrow z_P - z_{\Omega} = (z_A - z_{\Omega})e^{\frac{-i\pi}{2}}$
 $\Rightarrow p = (-1 + im + 1) \times (-i) - 1$
 $\Rightarrow p = m - 1$

• A' est milieu du segment $[OB] \Rightarrow z_{A'} = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{-1 - im}{2}$

• Q image de B par la rotation $r_2 \Rightarrow z_Q - z_{A'} = (z_B - z_{A'})e^{\frac{-i\pi}{2}}$
 $\Rightarrow z_Q = -i \left(-1 - im + \frac{1 + im}{2} \right) - \frac{1 + im}{2}$
 $\Rightarrow z_Q = -\frac{1 + im}{2}(1 - i)$
 $\Rightarrow z_Q = -\frac{1}{2}(1 + im)(1 - i)$

• B' est milieu du segment $[OA] \Rightarrow z_{B'} = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{-1 + im}{2}$

• Q image de B par la rotation $r_3 \Rightarrow z_R - z_{B'} = (z_O - z_{B'})e^{\frac{-i\pi}{2}}$
 $\Rightarrow z_R = -i \left(-\frac{-1 + im}{2} \right) - \frac{1 - im}{2}$
 $\Rightarrow z_R = -\frac{1}{2}(1 + i)(1 - im)$
 $\Rightarrow z_R = z_Q$

$$\begin{aligned}
 2- a) \quad q &= -\frac{1}{2}(1+im)(1-i) \\
 &= -\frac{1+im-i+m}{2} \\
 &= -\frac{1+m}{2} - \left(\frac{m-1}{2}\right)i
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \operatorname{Im}(q) = \frac{1-m}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } z_Q - z_R &= z_Q - z_Q \\
 &= 2i \operatorname{Im}(q) \\
 &= i - im \\
 &= -i(-1+m) = -ip
 \end{aligned}$$

$$b) \text{ On a : } \frac{z_Q - z_R}{z_P - z_O} = \frac{-ip}{p} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \left| \frac{z_Q - z_R}{z_P - z_O} \right| = 1 \\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z_Q - z_R}{z_P - z_O}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RQ = OP \\ (\overrightarrow{RQ}; \overrightarrow{OP}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

D'où $RQ = OP$ de plus les droites (RQ) et (OP) sont perpendiculaires.

Exercice 4:

Pour tout $x \in [0,1]$ $f(x) = x \ln(2-x)$

1- a) La fonction $x \mapsto \ln(2-x)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme composée de deux fonctions dérivable sur $[0,1]$; la fonction $x \mapsto x \ln(2-x)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme produit de deux fonctions dérivable sur $[0,1]$; et pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

b) f' est dérivable sur $[0,1]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0,1]$; et pour

$$\begin{aligned}
 \text{tout } x \in [0,1] ; \text{ on a : } f''(x) &= -\frac{1}{2-x} - \frac{2-x+x}{(2-x)^2} \\
 &= -\left(\frac{1}{2-x} + \frac{2}{(2-x)^2}\right)
 \end{aligned}$$

Donc $f''(x) < 0$ sur $[0,1]$; d'où f' est strictement décroissante sur $[0,1]$

c) f' est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$; donc f' réalise une bijection de $[0,1]$ vers $f'([0,1]) = \left[-1; \ln 2 - \frac{1}{2}\right]$ et $0 \in \left[-1; \ln 2 - \frac{1}{2}\right]$

D'où l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$

$$\text{On a : } f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(2 - \alpha) - \frac{\alpha}{2 - \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \ln(2 - \alpha) = \frac{\alpha}{2 - \alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha \ln(2 - \alpha) = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha}$$

2- a) f' est strictement décroissante sur $[0,1]$ et $f'(\alpha) = 0$; donc : $\begin{cases} f'(x) \geq 0 & \text{sur } [0; \alpha] \\ f'(x) \leq 0 & \text{sur } [\alpha; 1] \end{cases}$

D'où le tableau de variations de f

x	0	α			1
$f'(x)$	$\ln 2$	+	0	-	-1
$f(x)$	0	$\frac{\alpha^2}{2 - \alpha}$			0

b) On a pour tout $x \in [0,1]$ $f''(x) < 0$; donc (C) est concave sur $[0,1]$

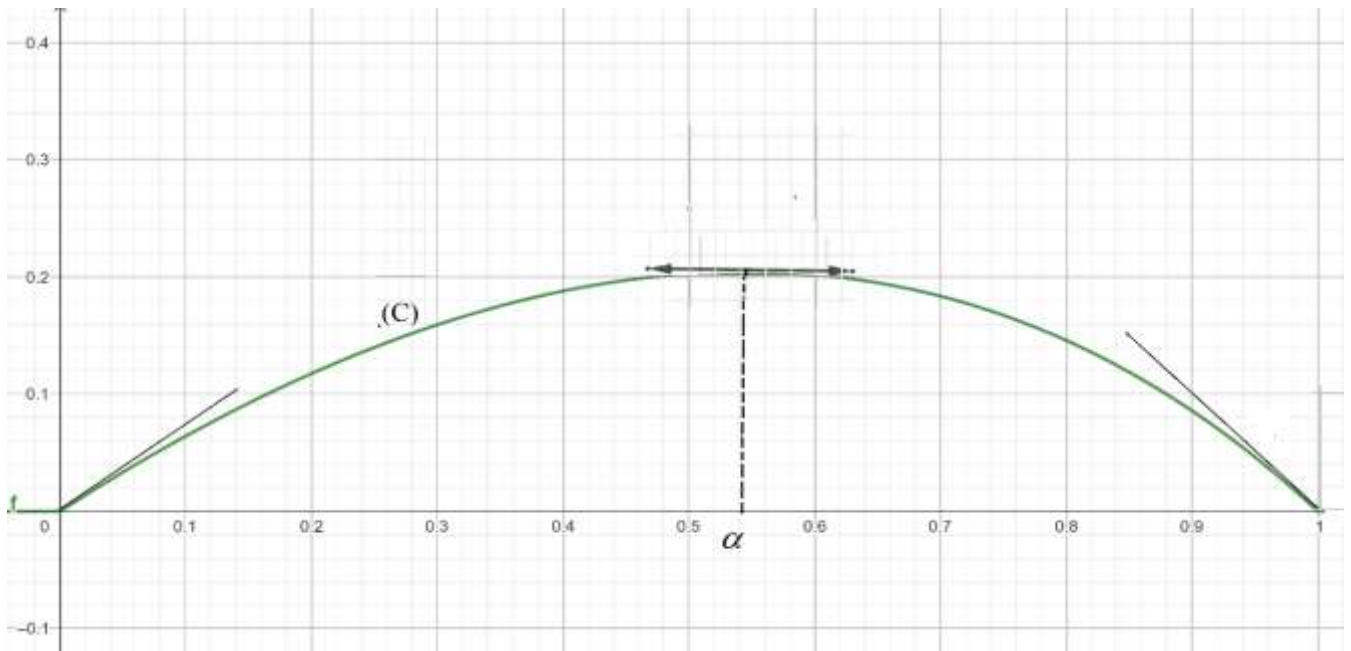
c) On déduit d'après la question précédente que toutes les tangentes à (C) sont au-dessus de (C) ; d'où : $(\forall x \in [0,1]) (\forall t \in [0,1]) / f(x) \leq f'(t)(x - t) + f(t)$

d) Alors on pose $t = 0$ et $t = 1$; on obtient :

$$(\forall x \in [0,1]) \bullet f(x) \leq x f'(0) + f(0) \Rightarrow f(x) \leq x \ln 2$$

$$\bullet f(x) \leq f'(1)(x - 1) + f(1) \Rightarrow f(x) \leq -x + 1$$

3) Construction de (C)



4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) ; l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |f(x)| dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx \quad \text{car } f(x) \geq 0 \text{ sur } [0,1] \\ &= \int_0^1 x \ln(2-x) dx \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(x) = \ln(2-x) \Rightarrow u'(x) = \frac{-1}{2-x} \\ v'(x) = x \Rightarrow u'(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } A = \left[\frac{x^2}{2} \ln(2-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \left(\frac{-1}{2-x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{2-x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{x^2}{2-x} &= \frac{-(4-x^2)+4}{2-x} \\ &= \frac{-(2-x)(2+x)+4}{2-x} \end{aligned}$$

$$= -(2+x) + \frac{4}{2-x}$$

$$\text{Donc } A = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-(2+x) + \frac{4}{2-x} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[- \left(2x + \frac{x^2}{2} \right) - 4 \ln(2-x) \right]_0^1 \\
&= -\frac{5}{4} + 2 \ln(2) \quad (u.a) \\
&= -\frac{5}{4} + 2 \ln(2) \quad (4cm^2)
\end{aligned}$$

Par suite $A = (8 \ln(2) - 5) \text{ cm}^2$

II- Pour tout entier naturel $n \geq 2$; on pose : $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$; ($\forall x \in [0,1]$)

$$1- a) x \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} x^n \geq 0 \\ 2-x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^n \geq 0 \\ \ln(2-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f_n(x) \geq 0$$

De plus on a : $f_n(0) = f_n(1) = 0$

b) f_n est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ comme produit de deux fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1[$ et on a : $f_n(0) = f_n(1)$; d'où d'après le Théorème de Rolle : $(\exists \alpha_n \in]0,1[) / f'(\alpha_n) = 0$

2- a) f_n est dérivable sur $]0,1[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0,1[$; et

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout } x \in [0,1] \text{ on a : } f'_n(x) &= nx^{n-1} \ln(2-x) - \frac{x^n}{2-x} \\
&= x^{n-1} \left(n \ln(2-x) - \frac{x}{2-x} \right) \\
&= x^{n-1} g_n(x)
\end{aligned}$$

Où $g_n(x) = n \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$; pour tout $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
b) g_n \text{ est dérivable sur }]0,1[\text{ pour tout } x \in [0,1] \text{ on a : } g'_n(x) &= \frac{-n}{2-x} - \frac{2-x+x}{(2-x)^2} \\
&= \frac{-n(2-x)-2}{(2-x)^2} \\
&= \frac{-2n-2+nx}{(2-x)^2}
\end{aligned}$$

Donc $g'_n(x)$ est du même signe que $(nx - 2n - 2)$; on a :

$$\begin{aligned}
x \in [0,1] &\Rightarrow x \leq 1 \\
&\Rightarrow nx - 2n - 2 \leq n - 2n - 2 \leq -(n+1) \leq 0
\end{aligned}$$

D'où $g'_n(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$

Par suite g_n est strictement décroissante sur $[0,1]$

c) g_n définit une bijection de $[0,1]$ vers $[g_n(1), g_n(0)] = [-1, n \ln 2]$

et comme $0 \in [-1, n \ln 2]$; alors $(\exists ! y \in [0,1]) / g_n(y) = 0$

D'après ce qui précède on sait que : $(\exists \alpha_n \in]0,1[) / f'(\alpha_n) = 0$

Et Pour tout $x \in [0,1]$ on a : $f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$

D'où $(\exists! \alpha_n \in]0,1[) / g_n(\alpha_n) = 0$

$$3- a) \text{ On a : } g_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow n \ln(2 - \alpha_n) - \frac{\alpha_n}{2 - \alpha_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 - \alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n(2 - \alpha_n)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n^n \ln(2 - \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{n+1}}{n(2 - \alpha_n)}$$

$$\Leftrightarrow f'_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{n+1}}{n(2 - \alpha_n)}$$

$$\text{Et on a : } \forall n \geq 2 ; 0 < \alpha_n < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \alpha_n^{n+1} < 1 \\ 1 < 2 - \alpha_n < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \alpha_n^{n+1} < 1 \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - \alpha_n} < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha_n^{n+1}}{2 - \alpha_n} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha_n^{n+1}}{n(2 - \alpha_n)} < \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow 0 < f'_n(\alpha_n) < \frac{1}{n}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(\alpha_n) = 0$

$$b) \text{ Pour tout entier naturel } n \geq 2 ; \text{ on a : } g_n(\alpha_{n+1}) = n \ln(2 - \alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_{n+1}}$$

$$\text{et } g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \Rightarrow (n+1) \ln(2 - \alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \ln(2 - \alpha_{n+1}) + n \ln(2 - \alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow n \ln(2 - \alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_{n+1}} = -\ln(2 - \alpha_{n+1})$$

$$\text{D'où } g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2 - \alpha_{n+1})$$

$$\text{On a pour tout } n \geq 2 : 0 < \alpha_{n+1} < 1 \Rightarrow 1 < 2 - \alpha_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow 0 < \ln(2 - \alpha_{n+1}) < \ln 2$$

$$\Rightarrow -\ln 2 < -\ln(2 - \alpha_{n+1}) < 0$$

$$\Rightarrow g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n) \text{ (car } g_n(\alpha_n) = 0 \text{)}$$

g_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ et $\alpha_n \in]0,1[$

Donc pour tout $n \geq 2$; $\alpha_n < \alpha_{n+1}$; d'où la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

c) la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.

d) Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$

$(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante ; donc pour tout $n \geq 2$; $0 < \alpha_2 \leq \ell \leq 1$

D'autre part on a : f_n est continue sur $[0,1]$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = f_n(\ell) = \ell^n \ln(2-\ell)$ et

Et d'après ce qui précède on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

Donc $\ell^n \ln(2-\ell) = 0$; et comme $\ell \neq 0$ alors $\ln(2-\ell) = 0 \Rightarrow 2-\ell = 1 \Rightarrow \ell = 1$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$

III- Pour tout $n \geq 2$; on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

1- Pour tout $n \geq 2$; on a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 f_{n+1}(x) dx - \int_0^1 f_n(x) dx$

$$= \int_0^1 (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx$$

$$= \int_0^1 (x^{n+1} \ln(2-x) - x^n \ln(2-x)) dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)x^n \ln(2-x) dx \leq 0$$

$$\text{Car } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x^n \geq 0 \\ \ln(2-x) \geq 0 \end{cases} ; \text{ donc } (x-1)x^n \ln(2-x) \leq 0$$

D'où $(\forall n \geq 2) ; I_{n+1} \leq I_n$

Donc la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

$$\text{On a : } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^n \leq 1 \\ 0 \leq \ln(2-x) \leq \ln 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^n \ln(2-x) \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(2-x) dx \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \ln 2$$

La suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est décroissante minorée par 0 ; donc elle est convergente.

2- On a : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

$$= \int_0^1 x^n \ln(2-x) dx$$

On pose :
$$\begin{cases} u(x) = \ln(2-x) \Rightarrow u'(x) = \frac{-1}{2-x} \\ v'(x) = x^n \Rightarrow v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

D'où
$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(2-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \left(\frac{-1}{2-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx \end{aligned}$$

3- On a : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^{n+1} \leq 1 \\ 1 \leq 2-x \leq 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^{n+1} \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x^{n+1}}{2-x} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \mathcal{I}_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_n = 0$