

Correction

①

Exercice 1

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 21 \\ u_{n+1} = \frac{1}{20} u_n + \frac{19}{20} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{20} u_n + \frac{19}{20} - 1 \\ &= \frac{1}{20} u_n + \frac{19}{20} - \frac{20}{20} \\ &= \frac{1}{20} (u_n - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 1 = \frac{1}{20} (u_n - 1)}$$

b) Montrons par récurrence que:
 $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$.

Pour $n=0$
On a : $u_0 = 21$ donc $u_0 \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$
supposons que : $u_n \geq 1$ et montrons que :
 $u_{n+1} \geq 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_n \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{20} u_n \geq \frac{1}{20} \\ &\Rightarrow \frac{1}{20} u_n + \frac{19}{20} \geq \frac{1}{20} + \frac{19}{20} \\ &\Rightarrow u_{n+1} \geq 1. \end{aligned}$$

Conclusion:

On a montré par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1.$$

2^{ème} méthode.

soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n \geq 1$ et Montrons que $u_{n+1} \geq 1$.

D'après la question précédente on a :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1}{20} (u_n - 1) \text{ et l'hypot. de rec. } u_n \geq 1$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - 1 \geq 0$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \geq 1.$$

2- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{20} u_n + \frac{19}{20} - u_n$$

$$= \left(\frac{1}{20} - 1 \right) u_n + \frac{19}{20}$$

$$= -\frac{19}{20} u_n + \frac{19}{20}$$

$$= \frac{19}{20} (1 - u_n).$$

$$\text{Donc : } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = \frac{19}{20} (1 - u_n)}$$

b) D'après la question précédente ; on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = \frac{19}{20} (1 - u_n)$$

$$\text{et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$$

alors: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq 0$

(2)

D'où (u_n) est décroissante; et comme (u_n) est minorée par 1 alors elle est convergente.

3. $v_n = \frac{20}{u_n - 1} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{20}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{20}{\frac{1}{20}(u_n - 1)} \end{aligned}$$

$$= 20 \times \frac{20}{u_n - 1}$$

$$= 20 \times v_n.$$

$$\text{Donc: } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = 20 \times v_n}$$

D'où: (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 20$ et de 1^{er} terme $v_0 = \frac{20}{u_0 - 1} = \frac{20}{20} = 1$

$$\text{Donc: } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = (20)^n}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a:

$$v_n = \frac{20}{u_n - 1} \Rightarrow v_n \times (u_n - 1) = 20$$

$$\Rightarrow v_n \times u_n - v_n = 20$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{20 + v_n}{v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{20 + 20^n}{20^n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{20}{20^n} + 1$$

$$\Rightarrow u_n = 20 \left(\frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20} \right)^n \right)$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 20 \left(\frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20} \right)^n \right)$$

c) Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{20} \right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{20} < 1$)

$$\text{alors : } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1}$$

Exercice 2

1. (E): $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

$a=1 ; b=-\sqrt{2}$ et $c=1$.

$$\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4$$

$$= -2$$

Donc l'équation (E) admet deux solutions complexes:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}}$$

2) A ($a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$) ; B ($b = \sqrt{2} + 1 + i$) et C ($c = \bar{b}$).

On a: $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

donc $\boxed{\arg(a) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]}$

3. Soit $\mathcal{R}(0; \frac{\pi}{4})$.

(3)

a) On a: $ac = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{2}+1-i)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)i - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + i - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$= (1+\sqrt{2}) + i$$

$$= b.$$

Donc: $\boxed{b=ac}$

On en déduit que: $b = c \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow b - 0 = (c - 0) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{R}(\mathcal{C}).$$

Donc $\mathcal{B}$ est l'image de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{R}$.

b) on a: $b=ac \Leftrightarrow \arg(b) \equiv \arg(ac) [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg(b) \equiv \arg(a) + \arg(c) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(b) \equiv \arg(a) + \arg(b) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(b) \equiv \arg(a) - \arg(b) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\arg(b) \equiv \arg(a) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\arg(b) \equiv \frac{1}{2} \arg(a) [2\pi]}$$

$$|b| = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{3+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2(2+\sqrt{2})}$$

Donc $\boxed{|b| = \sqrt{2(\sqrt{2}+2)}}$

c) D'après la question précédente on a:

$$|b| = \sqrt{2(\sqrt{2}+2)} \text{ et } \arg(b) \equiv \frac{1}{2} \arg(a) \text{ [2H].}$$

$$\text{donc: } b = \sqrt{2(\sqrt{2}+2)} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{D'où } b^4 = (\sqrt{2(\sqrt{2}+2)})^4 \left(\cos \left(4 \times \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(4 \times \frac{\pi}{8} \right) \right)$$
$$= 4(\sqrt{2}+2)^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 4(\sqrt{2}+2)^2 i$$

$$\text{alors: } \boxed{b^4 = 4(\sqrt{2}+2)^2 i}$$

4- D($d=\sqrt{2}$)

$$\text{a) On a: } b-d = \sqrt{2}+1+i-\sqrt{2}$$
$$= 1+i$$

$$= i(1-i)$$

$$= i(\sqrt{2}+1-i-\sqrt{2})$$

$$= i(c-d)$$

$$\text{donc: } \boxed{b-d = i(c-d)}$$

b) D'après la question précédente on a:

$$\text{• } b-d = i(c-d) \Rightarrow |b-d| = |i(c-d)|$$
$$\Rightarrow |b-d| = |i| |c-d|$$
$$\Rightarrow DB = DC$$

$$\text{Donc: } \boxed{DB = DC}$$

$$\text{• } b-d = i(c-d) \Rightarrow \frac{b-d}{c-d} = i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) \equiv \arg(i) \text{ [2H]}$$

$$\Rightarrow \left| (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \right|$$

(4)

c) on a : $\begin{cases} DB=DC \\ (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

donc le triangle BED est rectangle-isocèle en D.

Problème

Partie I

$$g(x) = e^x - 1 + x ; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1- On a : $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$
 $\Leftrightarrow x = 0.$

a) si $x \in]-\infty; 0]$ $\Leftrightarrow x \leq 0$
 $\Leftrightarrow e^x \leq e^0$
 $\Leftrightarrow e^x - 1 \leq 0$

b) si $x \in [0; +\infty[$ $\Leftrightarrow x \geq 0$
 $\Leftrightarrow e^x \geq e^0$
 $\Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$

Donc :
$$\begin{cases} e^x - 1 \leq 0 & \text{sur }]-\infty; 0] \\ e^x - 1 \geq 0 & \text{sur } [0; +\infty[\end{cases}$$

2- a) soit $x \in]-\infty; 0]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ e^x - 1 \leq 0 \end{cases}$

b) soit $x \in [0; +\infty[\Rightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ x \geq 0 \\ e^x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0.$$

$$\text{Donc: } \left\{ \begin{array}{l} g(x) \leq 0 \text{ sur }]-\infty; 0]. \\ g(x) \geq 0 \text{ sur } [0; +\infty[\end{array} \right.$$

Partie II.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \frac{1 - e^x + xe^x}{e^x + 1}$$

2. a) pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - e^x + xe^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x(e^{-x} - 1 + x)}{e^x(1 + e^{-x})} \\ &= \frac{x + e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \frac{x + e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}}$$

$$\text{b) On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$

$$= +\infty$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ (on pose } t = -x) \right)$$

$$\text{Donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x + xe^x}{e^x + 1}$$

$$= 1$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1}$$

interprétation géométrique

(C_f) admet une asymptote horizontale
d'équation $y=1$ au voisinage de $-\infty$.

$$3. (\Delta): y = x - 1$$

a) pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:

$$\begin{aligned}
 f(x) - (x-1) &= \frac{x + e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} - (x-1) \\
 &= \frac{x + e^{-x} - 1 - (x-1)(e^{-x} + 1)}{e^{-x} + 1} \\
 &= \frac{x + e^{-x} - 1 - xe^{-x} - x + e^{-x} + 1}{e^{-x} + 1} \\
 &= \frac{2e^{-x} - xe^{-x}}{e^{-x} + 1}
 \end{aligned}$$

(5)

$$= \frac{(2-x)e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

Donc: $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) - (x-1) = \frac{(2-x)e^{-x}}{e^{-x}+1}}$

b) On a; pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - (x-1) = \frac{(2-x)e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

$$= \frac{2e^{-x} - xe^{-x}}{e^{-x}+1}$$

$$\text{Donc: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-x} - xe^{-x}}{e^{-x}+1}$$

$$= 0$$

$$\left(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \right)$$

$$\text{D'où: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = 0}$$

Interprétation géométrique:

La droite $(\Delta): y = (x-1)$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c) Résolvons l'équation $f(x) - (x-1) = 0$

On a:

$$f(x) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)e^{-x}}{e^{-x}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

D'où le point $I(2; f(2)) = (2; 1)$ est le point d'intersection de (C_f) et la droite (Δ) .

d) $f(x) - (x-1)$ est du même signe que $(2-x)$
 d'où le tableau de signe de $f(x) - (x-1)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - (x-1)$	$+$	0	$-$
position relative de (C_f) et de (Δ)	(C_f) est au-dessus de (Δ) sur $]-\infty, 2[$		(C_f) est au-dessous de la droite (Δ) sur $[2, +\infty[$

4- a) pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:

$$f'(x) = \cancel{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} \left(\frac{1 - e^x + xe^x}{e^x + 1} \right)'$$

$$= \frac{(1 - e^x + xe^x)'(e^x + 1) - (1 - e^x + xe^x)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(-e^x + (xe^x)')(e^x + 1) - (1 - e^x + xe^x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(-e^x + e^x + xe^x)(e^x + 1) - (1 - e^x + xe^x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(xe^x + x - 1 + e^x - xe^x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 1 + x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Donc: $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{g(x) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}}$

b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

Donc $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$ sur $\mathbb{R}$; et d'après la partie I on a:

$$\begin{cases} g(x) \leq 0 \text{ sur }]-\infty; 0] \\ g(x) \geq 0 \text{ sur } [0; +\infty[\end{cases}$$

D'où: f est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty; 0]$.

c) Tableau de variation de f .

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$f(0)$	$+\infty$

5. (D): $y = x$.

a) pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \frac{1 - e^x + x e^x}{e^x + 1} + x \\ &= \frac{e^x - x e^x - 1 + x e^x + x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x - 1 + x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x - f(x) = \frac{g(x)}{e^x + 1}$

b) D'après la question précédente on a :

$$x - f(x) = \frac{g(x)}{e^x + 1}.$$

Donc $x - f(x)$ est du même signe que $g(x)$

D'où :

T. signe de $x - f(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x - f(x)$	$-$	0	$+$
Position relative de (C_f) et (D)	(C_f) est au dessus de (D)		(C_f) est au-dessous de (D) .

$B-g/h$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ car f l'est et h est continue sur $[0; +\infty[$; donc elle admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle

$$\begin{aligned} J &= f([0; +\infty[) \\ &= [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ &= [0; +\infty[. \end{aligned}$$

b) on a: $f'(1)=x \Rightarrow f(x)=1$ ⑧
 $\Rightarrow \frac{1-e^x+xe^x}{e^x+1} = 1$
 $\Rightarrow 1-e^x+xe^x = e^x+1.$
 $\Rightarrow xe^x - 2e^x = 0.$
 $\Rightarrow (x-2)e^x = 0$
 $\Rightarrow x=2.$

Donc: $f^{-1}(1)=2.$

Donc: $(h^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$
 $= \frac{1}{f'(2)}$

et $f'(2) = \frac{e^2 g(2)}{(e^2+1)^2}$
 $= \frac{e^2(e^2-1+2)}{(e^2+1)^2}$
 $= \frac{e^2(e^2+1)}{(e^2+1)^2}$
 $= \frac{e^2}{e^2+1}$

alors: $(h^{-1})'(1) = \frac{e^2+1}{e^2}$

Donc: $\boxed{(h^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e^2}}$

7-

