Série d'exercices Notions de logique — 1BAC SM

Proposition- Fonction propositionnelle

Exercice N°1

1. Donner une Proposition Vraie
2. Donner une proposition fausse
3. « $F(x):(x\in\mathbb{R});x^2-3x+7=0$ » à partir de cette fonction propositionnelle, donner deux Propositions fausses et deux Propositions vraies.

Exercice N°2

Déterminer la valeur de vérité de chacune des Propositions suivantes :

1. $P_1:"(\exists x\in\mathbb{R})/x^2+x+1=0"$
2. $P_2:"(\forall x\in\mathbb{R})/x^2+x+1\geq 0"$
3. $P_3:"(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x\leq y"$
4. $P_4:"(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});x\leq y"$
5. $P_5:"(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});x\leq y"$
6. $P_6:"(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});x^2y^2>xy"$

Les opérations sur les Propositions

Exercice N°3

Déterminer la négation de chacune des Propositions suivantes :

1. $P_1:"(\forall x\in\mathbb{R});(x\geq 0\, ou\, x\leq 0)"$
2. $P_2:"(\exists x\in\mathbb{N});x^2+1>x"$
3. $P_3:"(\forall x\in\mathbb{R})(\exists a\in\mathbb{R});x<a<x+1"$
4. $P_4:"(\exists x\in\mathbb{R})(\exists r\in\mathbb{R});x-r=x=x+r"$

Exercice N°4

Donner la négation de chacune des Propositions suivantes et déterminer sa valeur de vérité :

1. $P_1:"(\forall x\in\mathbb{R});(x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z})"$
2. $P_2:"(\exists!k\in Z);-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi"$
3. $P_3:"(\forall x\in\mathbb{N});(x\neq 1\Rightarrow x>1)"$
4. $P_4:"(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R});y^2-xy-1=0"$

Exercice N°5

En utilisant le raisonnement par un contre-exemple, montrer que les Propositions suivantes sont fausses :

1. $P_1:"(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});2x-4y\neq 5"$

2. $P_3 : "(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; (x + \frac{1}{x} \geq 2)"$

3. $P_4 : "(\forall x \in]0;1[) ; \frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1"$

Exercice N°6

Soient $(x;y) \in \mathbb{R}^{*2}$ *deux nombres réels non nuls, P et Q sont deux Propositions tels que :*

$P : "2x + 4y = 1"$ *et* $Q : "\frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20"$

Montrer que : $P \Rightarrow Q$

Lois logiques et méthode de raisonnement

Exercice N°7

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \overline{((A\, et\, \overline{B})\, ou\, (\overline{A}\, et\, B))}$

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B})$

$(A \Rightarrow (B\, ou\, \overline{C})) \Leftrightarrow (B\, ou\, (A \Rightarrow \overline{C}))$

Exercice N°8

En utilisant le raisonnement par l'absurde montrer que :

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
2. *en déduire:* $\sqrt{3} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice N°9

ABC *est un triangle dont les longueurs des côtés sont :* $6a$; $3a$ *et* $4a$ $(a > 0)$.

Montrer que ABC *n'est pas triangle rectangle.*

Exercice N°10

En utilisant le raisonnement par disjonction des cas, résoudre dans RR les inéquations suivantes:

- $\sqrt{x-1} \geq x - 4$
- $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 2x - 3$

Exercice N°11

En utilisant le raisonnement par les équivalences successives Montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq \frac{x}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{3}$

$(\forall a\, et\, b \in]-1;1[) ; -1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Exercice N°12

En utilisant le raisonnement par récurrence, Montrer que :

$$\left(\forall n\in \mathrm{IN}^*\right);1^3+2^3+3^3+....+n^3=\left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)^2$$

$$\left(\forall n\in \mathrm{IN}^*\right);1+3+5+....+\left(2n+1\right)=\left(n+1\right)^2$$

$$\left(\forall n\in \mathrm{IN}^*\right);1\times 2+2\times 3+....+n\left(n+1\right)=\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{3}$$

Exercice N°13

Montrer que:

$(\forall n\in \mathrm{IN});(4^n+6n-1$ *est divisible sur 9)*

$(\forall n\in \mathrm{IN}^*);(3^{2n}+2^{6n-5}$ *est divisible sur 11)*