Exercice 1

1) Donner la forme algébrique et trigonométrique de $z = \dfrac{2-2i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$

2) En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

3) Déterminer les entiers naturels n tels que : $z^n \in \mathbb{R}$.

4) Déterminer les entiers naturels n tels que : $z^n \in i\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. On pose : $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1) Calculer j^2 ; j^3 ; $1+j+j^2$.

2) Calculer j^n selon les valeurs de n.

3) Calculer la somme suivante : $S = j + j^2 + \cdots + j^{2022}$.

Exercice 3

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$z_1 = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$; $z_2 = \dfrac{1}{1-i\sqrt{3}}$; $z_3 = \left(\sqrt{3}-i\right)^7$; $z_4 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i$; $z_5 = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$

$z_6 = e^{-i\frac{\pi}{6}} - i$; $z_7 = e^{i\frac{\pi}{8}} - ie^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_8 = e^{e^{i\frac{\pi}{3}}}$; $z_9 = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

Exercice 4

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans les cas suivants :

1) $1+z+z^2 \in \mathbb{R}$; 2) $\dfrac{z+1}{z-2i} \in i\mathbb{R}$; 3) $\left|\dfrac{z-1}{z-2}\right| = 1$

4) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 5

1) Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ Montrer que: $|z| = 1 \Leftrightarrow i\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) \in \mathbb{R}$

2) Soit $z \in \mathbb{C} - \{2i\}$ Montrer que: $|z| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2z-i}{z-2i}\right| = 1$

WWW.GUESSMATHS.CO

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $z_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ et soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

1) Montrer que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$: $1 + z_n + z_n^2 + \cdots + + z_n^{n-1} = i \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

2) En déduire : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $U_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$

EXERCICE 7

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $\frac{1}{2}z^2 + (1-3i)z - 4m = 0$ tel que $m \in \mathbb{C}^*$.

1- a) Déterminer les racines carrées du nombre $8-6i$.

b) Déterminer en fonction de m ; z_1 et z_2 solutions de l'équation (E) tel que :

$Re\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$.

c) Calculer en fonction de $\arg m$; $\arg z_1$ et $\arg z_2$.

2- On considère les points M_1 ; M_2 ; M et D d'affixes respectives m ; z_1 ; z_2 et $1+3i$.

a) Montrer que OM_1M_2 est rectangle en O.

b) Montrer que si $\arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$; donc les points O, M et D sont alignés.

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que $\arg(z_1 + z_2) \equiv 0[\pi]$

3- Le point M_1' est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Et M_2' est l'image de M_2 par la rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Montrer que M_1 ; M_2; M_1' ; M_2' sont cocycliques.

EXERCICE 8

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E): $\frac{1}{2}z^3 - (1+i)z^2 + 2(1+i)z - 4i = 0$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

WWW.GUESSMATHS.CO

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points : $A(1+i\sqrt{3})$; $B(1-i\sqrt{3})$ et $C(2i)$

a) Montrer que: $OA = OB$.

b) Soit D le milieu du segment $[AC]$.

Déterminer l'affixe du point D et une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right)$.

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

3) Soit O' l'image du point O par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer les affixes des points O' et B' .

b) Soit I le milieu du segment $[OB]$.

Montrer que (AI) est une hauteur du triangle $AO'B'$.

Exercice 9

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,On pose : $f(z) = (1+ia)z - 2ia$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

1) Montrer que l'équation : $f(z) = z$, admet dans $\mathbb{C}$ une solution unique ω que l'on déterminera.

2) On considère les ensembles : $(D) = \{M(z) \in (P) / f(z) \in \mathbb{R}\}$ et $(\Delta) = \{M(z) \in (P) / f(z) \in i\mathbb{R}\}$.

a) Montrer que (D) et (Δ) sont des droites (On donnera une équation cartésienne de chacune).

b) Justifier que : $(D) \perp (\Delta)$, Puis déterminer l'affixe de leurs point d'intersection.

3) On pose : $\theta = \text{Arctan}(a)$. Montrer que pour tout $M(z) \in (P)$ tels $z \neq \omega$

On a : $\Omega M' = \frac{1}{\cos\theta} \times \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi]$. Où $\Omega(\omega)$ et $M'(f(z))$.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacun des ensembles :

$(\Gamma_1) = \{M(z) \in (P) / |f(z) - \omega| = 1\}$ et $(\Gamma_2) = \left\{M(z) \in (P) / |f(z)| = \frac{1}{\cos\theta}\right\}$

WWW.GUESSMATHS.CO