

Exercice 1

(les suites)

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. a) montrons par récurrence que : $((\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 5)$ (P)

• pour $n=0$ on a $u_0 = 4 < 5$ donc (P) est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$: supposons que (P) est vraie pour n et montrons qu'elle l'est pour $(n+1)$

(P) est vraie, on a : $u_n < 5$

$$\begin{aligned} u_n < 5 &\Leftrightarrow \frac{2}{5}u_n < \frac{2}{5} \times 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5}u_n + 3 < 2 + 3 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} < 5 \end{aligned}$$

Donc (P) est vraie pour $(n+1)$.

Conclusion : $((\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 5)$

b) Vérifions que : $(u_{n+1} - u_n) = -\frac{3}{5}(5 - u_n)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{5}u_n + 3 - u_n \\ &= \frac{2}{5}u_n - \frac{5}{5}u_n + 3 \\ &= -\frac{3}{5}u_n + \frac{3 \times 5}{5} \\ &= -\frac{3}{5}(5 - u_n) \end{aligned}$$

on a $((\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 5)$ d'où
 $((\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n > 0)$
 et on en déduit que la suite
 (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) est croissante majorée par 5
 donc convergente.

2. $v_n = 5 - u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \text{a) } 5 - u_{n+1} &= 5 - \left(\frac{2}{5}u_n + 3\right) \\ &= 5 - \frac{2}{5}u_n - 3 \\ &= \frac{2}{5}(5 - u_n) \\ &= \frac{2}{5}v_n \end{aligned}$$

$$\text{D'où } ((\forall n \in \mathbb{N}) v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n)$$

On conclue que: la suite (u_n) est
 géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de
 premier terme $v_0 = 1$

$$\text{Et on a : } ((\forall n \in \mathbb{N}) v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n)$$

b) on a : $v_n = 5 - u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow u_n = 5 - v_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{Donc : } ((\forall n \in \mathbb{N}) u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n)$$

Et comme

$$\left| \frac{2}{5} \right| < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$

Exercice 2

(la géométrie dans l'espace)

(P) : $2x - z - 2 = 0$ et la sphère (S) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$

1. On a (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+0)^2 + (z-1)^2 - 2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

Donc la sphère (S) est de centre $\Omega(-1, 0, 1)$ et de rayon.

2. a) Calculons $d(\Omega, (P))$

On a : $d(\Omega, (P)) = \frac{|2 \times (-1) - 1 - 2|}{\sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Donc $d(\Omega, (P)) = \sqrt{5} < R$

b) on conclue que (P) coupe la sphère (S) selon un cercle ($\mathcal{C}$).

3. • le rayon du cercle ($\mathcal{C}$) est $r = 2$

$$\left(\begin{array}{l} r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} \\ = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right)$$

• Soit (Δ) la droite passant par Ω est perpendiculaire au plan (P). Le centre du cercle ($\mathcal{C}$) est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P). Donc c'est le point H d'intersection de (Δ) et (P) signifie que :

$$(\exists t \in \mathbb{R}) \setminus \overrightarrow{\Omega H} = \vec{n} \quad \text{avec} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 + 2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - t \end{cases}$$

Et : $H \in (P) : 2x_H - z_H - 2 = 0$

D'où :

$$2(-1 + 2t) - (1 - t) - 2 = 0$$

$$5t - 5 = 0 \text{ et } t = 1$$

Et par conséquent $H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le centre du cercle ($\mathcal{C}$)

Exercice 3

(les nombres complexes)

1. a) Soit l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4 \times 1 \times 32$
 $= 64 - 128 = -64$

On a $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 + 4i \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 - 4i \quad \text{D'où } S = \{4 - 4i, 4 + 4i\}$$

b) • soit $a = 4 + 4i$ on a : $|a| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

donc a s'écrit : $a = |a| \left(\frac{4}{|a|} + \frac{4}{|a|}i \right) = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

or $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ d'où : $a = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

• d'après la formule de Moivre on a :

$$a^{12} = \left(4\sqrt{2} \right)^{12} \left(\cos 12 \times \frac{\pi}{4} + i \sin 12 \times \frac{\pi}{4} \right) = \left(4\sqrt{2} \right)^{12} \left(\underset{=-1}{\cos 3\pi} + i \underset{=0}{\sin 3\pi} \right) = - \left(4\sqrt{2} \right)^{12}$$

Donc a est un réel négatif.

2. a) $a = 4 + 4i$, $b = 2 + 3i$ et $c = 3 + 4i$

On a $M' = R_{\left(C, \frac{\pi}{2} \right)}(M)$ Donc : $(z' - c) = (z - c)e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$(z' - (3 + 4i)) = i(z - (3 + 4i))$$

$$z' - (3 + 4i) = i(z - 3 - 4i)$$

$$z' = iz - 3i + 4 + 3 + 4i$$

$$z' = iz + 7 + i$$

Donc l'affixe de D image de A par la rotation R est : $d = 3 + 5i$

b) • calculons l'affixe z'_A de $R(A)$

$$z' = iz + 7 + i$$

Donc : $z'_A = ia + 7 + i$

$$= i(4 + 4i) + 7 + i$$

$$= 3 + 5i = d$$

c) on a : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i| \Leftrightarrow |z - (3 + 5i)| = |z - (4 + 4i)|$

$$\Leftrightarrow |z - d| = |z - a|$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_A|$$

$$\Leftrightarrow DM = AM$$

Donc l'ensemble (E) des points dont l'affixe vérifie l'équation est la droite (Δ) médiatrice du segment $[AD]$.

Et comme $R(A) = D$, $R(C) = C$ et $R(B) = B$ donc $DC = AC$ et $AB = DB$
d'où $C \in (E)$ et $B \in (E)$ conclusion: (E) est la droite (BC) .

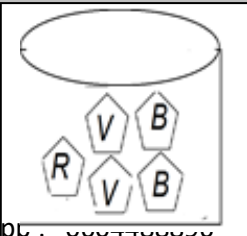
$$\underbrace{\cos k\pi}_{=-1} \quad k \text{ impaire}$$

$$\underbrace{\sin k\pi}_{=0} \quad \forall k$$

Exercice 4

(les probabilités)

On tire une façon aléatoire et avec remise trois Jetons de U



$$\text{Card}\Omega = 5^3 = 125$$

1. A « les trois jetons tirés sont de même couleur »

$$\text{Card}A = 2^3 + 2^3 + 1^3 = 17$$

$$p(A) = \frac{17}{125}$$

2. X la variable aléatoire égale au nombre de jetons Blancs tirés.

- X peut prendre les valeurs 0,1,2 ou 3.

a) ■ $P(X=0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$ (nombre de jetons Blancs est 3)

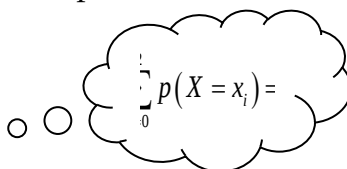
■ $P(X=1) = \frac{C_3^1 \times 2^1 \times 3^2}{125} = \frac{54}{125}$

■ $P(X=2) = \frac{C_3^2 \times 2^2 \times 3^1}{125} = \frac{36}{125}$

■ $P(X=3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$

Donc la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$



(Etude de fonction)

I. $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) = 1 - x + x \ln x$

1.a) $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g'(x) = (1 - x + x \ln x)' = -1 + \ln x + x \times \frac{1}{x}$
 $= \ln x$

donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g'(x) = \ln x$

b) on sait que : $\begin{cases} \ln x \leq 0 & \text{sur }]0, 1] \\ \ln x \geq 0 & \text{sur } [1, +\infty[\end{cases}$

donc : $\begin{cases} g'(x) \leq 0 & \text{sur }]0, 1] \quad g \text{ est décroissante} \\ g'(x) \geq 0 & \text{sur } [1, +\infty[\quad g \text{ est croissante} \end{cases}$

c) $g(1) = 1 - 1 + 1 \times \ln 1 = 0$

• g est décroissante sur $]0, 1] \Rightarrow (\forall x \in]0, 1]) \quad g(x) \geq g(1) = 0$

• g est croissante sur $[1, +\infty[\Rightarrow (\forall x \in [1, +\infty[) \quad g(x) \geq g(1) = 0$

Donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) \geq 0$

I-

1. On écrit $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{3x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} \right) = -1 \times \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^2} \right) \\ &= -\infty \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0 \right] \end{aligned}$$

donc (C) admet la droite $x = 0$ comme asymptote verticale au voisinage de $+\infty$

II. $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \right) = 3 \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0 \right)$$

donc (C) admet la droite $y = 3$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

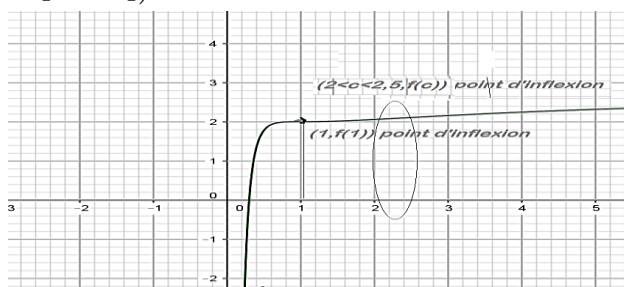
$$\begin{aligned} 3. a) \quad (\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) &= \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \right)' \\ &= \left(\frac{2}{x^3} - \left(\frac{x \times \frac{2}{x} - 2 \ln x}{x^2} \right) \right) \\ &= \frac{2 - 2x + 2x \ln x}{x^3} = \left(\frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^3} \right) \\ &= \frac{2g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

b) signifie $f'(1) = 0$ que la courbe (C) admet une tangente horizontale au point $(1, f(1))$.

c) on a : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) \geq 0$ et comme $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$

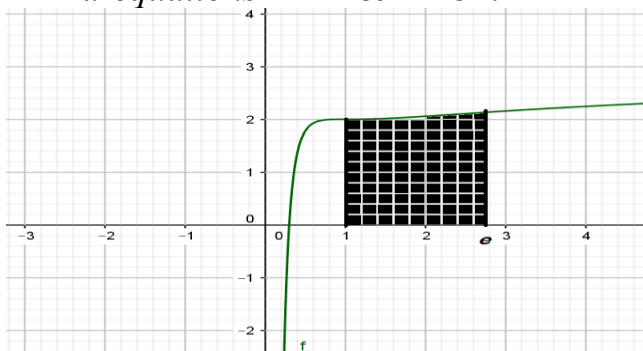
$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]0, +\infty[$.



$$5. a) \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = \left[(\ln x)^2 \right]_1^e = 1$$

$$\left\langle \text{on a } (u^2(x))' = 2u'(x)u(x) \text{ on pose } u(x) = \ln x \right\rangle$$

L'air de la surface comprise entre la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.



$$b) A = \left(\int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx \right) u.a = \left([3x]_1^e + \left[\frac{1}{x} \right]_1^e - \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx \right) u.a$$

$$= \left(3e - 3 + \frac{1}{e} - 1 - 1 \right) u.a = \left(3e + \frac{1}{e} - 5 \right) u.a$$

$$\text{conclusion : } A = \left(3e + \frac{1}{e} - 5 \right) \text{cm}^2$$

$$6. \left(\forall x \in \mathbb{R}^* \right) h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)^2}{|x|}$$

$$a) \left(\forall x \in \mathbb{R}^* \right) (-x \in \mathbb{R}^*) \text{ et } h(-x) = 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln(-x)^2}{|-x|}$$

$$= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)^2}{|x|} = h(x)$$

Donc $h(-x) = h(x)$ d'où h est une fonction paire.

$$\begin{cases} (\forall x \in]0, +\infty[) & f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \\ (\forall x \in]0, +\infty[) & h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)^2}{|x|} \end{cases}$$

$$\text{et comme sur }]0, +\infty[\text{ on a } \begin{cases} \ln(x)^2 = 2 \ln x \\ |x| = x \end{cases} \text{ alors } h(x) = f(x)$$

donc la courbe de h sur $]0, +\infty[$ est confondue avec celle de f .

et comme h est paire alors sa courbe sur $\mathbb{R}^$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées*

