Série n °8 exercices sur la fonction ln **2éme Bac Sc.Eco**

1. Résolution (in)équations

1. Résoudre l'équation : $\ln\left(x^2-3x-2\right)=\ln\left(2x-6\right)$.

2. Résoudre l'inéquation : $e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1}>2e$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ *le système :* $\begin{cases}\ln x-\ln y=1\\ x+y=2e\end{cases}$.

4. Résoudre l'inéquation : $\ln(1+x)-\ln(1-x)>\ln(2x)-\ln(1+x)$.

5. Résoudre : $1+\ln(x+3)=\ln\left(x^2+2x-3\right)$.

6. Résoudre : $\ln\left(x^2-4e^2\right)<1+\ln(3x)$.

2. Dérivées et ln

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x)=(\ln x)^2-6\ln x+5$.

2. $f(x)=2x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

3. $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$.

Fonction ln

Exercice 1

1. *On considère la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ *et déterminer la fonction dérivée* f' *de f.*

2. *On considère la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(\ln x)^2+\ln x+1}$ *et on désigne par* (Γ) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *d'unités graphiques* $1\ \text{cm}$.

   a) *Exprimer g en fonction de f et préciser l'ensemble de définition de g.*
   b) *Déterminer la fonction dérivée* g' *de g (on pourra utiliser la question 1.).*
   c) *Etudier le signe de* g'.
   d) *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
   e) *Dresser le tableau des variations de g.*
   f) *Construire la courbe* (Γ) *en précisant la tangente au point d'abscisse 1.*

Exercice 2

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *(unité graphique 3 cm).*

1. *On considère la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} & si\ \ x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 0 .

2. a) *Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $g(x)=\ln(x+1)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}\right)$

   Calculer $g(0)$ *et en déduire que sur* $\mathbb{R}^+$: $\ln(x+1)\leq\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}\right)$.

   b) *Par une étude analogue, montrer que si* $x\geq 0$ *, alors* $\ln(1+x)\leq x-\dfrac{x^2}{2}$.

   c) *Établir que pour tout x strictement positif on a :* $-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2}$.

   En déduire que f est dérivable à droite en 0 *et que* $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

3. a) *Soit h la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$.

   Étudier le sens de variation de h et en déduire son signe sur $[0;+\infty[$.

   b) *Montrer que sur* $[0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

   c) *Dresser le tableau de variation de f en précisant* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   d) *On désigne par* (C) *la représentation graphique de f.*

   - *Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0.*
   - *Montrer que* (C) *admet une asymptote.*
   - *Tracer la courbe* (C).

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\ln\left(e^{x}+2e^{-x}\right)$.

Soit (C) *la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$.

On admet que, pour tout réel x, $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et montrer que la droite* (d) *d'équation* $y=x$ *est asymptote à* (C).

Étudier la position relative de (C) *et de* (d).

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et montrer que la droite* (d') *d'équation* $y=-x+\ln 2$ *est asymptote à* (C).

4. Étudier les variations de la fonction f. Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\frac{3}{2}\ln 2$.

5. Tracer la courbe (C) *; les droites* (d) *et* (d').

Partie B –

Encadrement d'une intégrale On pose : $I=\int_2^3\left[f(x)-x\right]dx$.

1. Donner une interprétation géométrique de I .

2. Montrer que, pour tout $X\in[0;+\infty[$; $\ln(1+X)\leq X$.

En déduire que : $0\leq I\leq\int_2^3 2e^{-2x}dx$ *et donner un encadrement de* I *d'amplitude* $0,02$.

Exercice 4

1) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $g(x)=x^{3}-1+2\ln x$.

a) Etudier les variations de g

b) Calculer $g(1)$ *; En déduire le signe de* $g(x)$ *pour tout* $x\in]0;+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^{2}}$ *; On note* (C) *la courbe de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$; $f'(x)=\frac{g(x)}{x^{3}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que la droite D *d'équation* $y=x-1$ *est une asymptote oblique à* (C) *au voisinage de* $+\infty$ *et préciser la position relative de* (C) *et* D.

b) Tracer D *et* (C)

Exercice 14

On considère les fonctions f et g définies sur $]-\infty;1[$ *par :* $f(x)=\ln(1-x)$ *et* $g(x)=x\ln(1-x)$.

1) a) Etudier les variations de f

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

2) a) Calculer $g'(x)$

b) Montrer que pour g' *est décroissante sur* $]-\infty;1[$

c) Calculer $g'(0)$ et dresser le tableau de signe de g'

d) Dresser le tableau de variation de g

3) a) Préciser la position relative de la courbe de f et la courbe de g.

b) Résoudre l'équation $g(x)=x$

c) Tracer (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) Soit h la restriction de g sur $]-\infty;0[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}.

b) Tracer (C_h) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ définie sur un intervalle à déterminer.