

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A
et $AB = 2\text{cm}$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$

CORRECTION EXERCICE 1

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA}$ car :

A est le projeté orthogonale de C

sur (AB) et B est le projeté

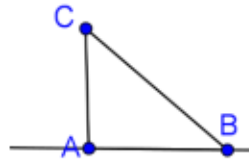
orthogonale de B sur (AB)

et A est le projeté orthogonale de C sur (AB)

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} \times \vec{0} = 0$

de même On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BA} = 2 \times 2 = 4$

de même On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AB} = -2 \times 2 = -4$



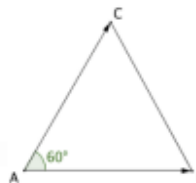
EXERCICE 2

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.

Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

CORRECTION EXERCICE 2

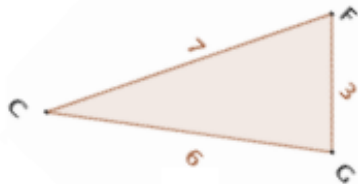
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC \\ &= a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$



EXERCICE 3

Soit CFG un triangle tel que $CF = 7$ et
 $CG = 6$ et $FG = 3$

Calculer : $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$



CORRECTION EXERCICE 3

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(CG^2 + CF^2 - GF^2) = \frac{1}{2}(6^2 + 7^2 - 3^2) = 38$$

EXERCICE 4

soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ et } \|\vec{v}\| = 4 \text{ et } (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

CORRECTION EXERCICE 4

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

EXERCICE 5

1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et
 $AC = 5$ et $BC = 6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
Calculer AH

2) sachant que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$

a) Calculer : $A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$ et $B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right) \cdot \left(\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2}\right)$

$$C = (\vec{u} - \vec{v})^2 \text{ et } D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2$$

b) en déduire $E = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ et $F = \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

CORRECTION EXERCICE 5

1) Calcul de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\text{On a : } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(BC^2 - AB^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(6^2 - 7^2 - 5^2) = -19\end{aligned}$$

donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -19$

donc : On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 19$

a) Calcul de AH

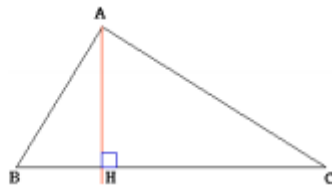
$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ donc : } AH = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB} = \frac{19}{7}$$

$$2) a) A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$A = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{v}\|^2 = 2 \times 4^2 + \frac{1}{2} - 6 \times 2^2$$

$$A = 32 + \frac{1}{2} - 24 = \frac{15}{2}$$



$$B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v} \right) \cdot \left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2} \right) = \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + \frac{1}{4} \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$B = \frac{1}{2} \times \|\vec{u}\|^2 - \frac{3}{4} \times \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \times \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \times$$

$$B = 8 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{51}{8}$$

$$C = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4^2 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 2^2$$

$$C = 16 + 1 + 4 = 21$$

$$D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2$$

$$D = 4 \times 4^2 + 12 \left(-\frac{1}{2} \right) + 9 \times 2^2 = 64 - 6 + 36 = 94$$

$$b) (\vec{u} - \vec{v})^2 = 21 \quad \text{donc} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 21 \quad \text{donc} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{21}$$

$$(2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 94 \quad \text{donc} \quad \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = 94 \quad \text{donc}$$

$$\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \sqrt{94}$$

EXERCICE 6

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 1$

Et $AC = \sqrt{2}$ et $CB = 2$ et D un point tel que :

$$\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos A$

2) Ecrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle ABD

4) Calculer : AD

5) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AC]$

Calculer : AI et BJ

CORRECTION EXERCICE 6

1) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

$$\text{on a : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$\text{Et on a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos A = AB \times AC \times \cos A$$

$$\text{Donc : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc : } 2^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc : } 4 = 1 + 2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \quad \text{donc : } 1 = -2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$$

Déduction de $\cos A$: on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos A$

$$\text{Donc : } -\frac{1}{2} = AB \times AC \times \cos A \quad \text{donc : } -\frac{1}{2} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos A$$

$$\text{Donc : } \cos A = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$2) \quad \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad \text{ssi} \quad \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \text{ssi} \quad \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Ssi} \quad \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD} \quad \text{donc : } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

$$3) \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

Donc : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ par suite : $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$

Et donc : ABD est un triangle rectangle en A

$$4) \text{ on a : } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

$$\text{donc : } \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \right)^2 \quad \text{donc :}$$

$$AD^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AC}^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{9}(AB^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 4AC^2)$$

$$AD^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times 2\right) = \frac{1}{9}(1 - 2 + 8) = \frac{7}{9}$$

$$\text{Donc : } AD = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

5) a) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2 \quad \text{donc} \quad 1^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}2^2$$

$$\text{Ssi} \quad 3 = 2AI^2 + 2 \quad \text{ssi} \quad 1 = 2AI^2 \quad \text{ssi} \quad AI^2 = \frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad AI = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$$BA^2 + BC^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$\text{Donc : } 1^2 + 2^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}^2 \quad \text{ssi} \quad 5 = 2BJ^2 + 1$$

$$\text{Ssi} \quad BJ^2 = 2 \quad \text{ssi} \quad BJ = \sqrt{2}$$