

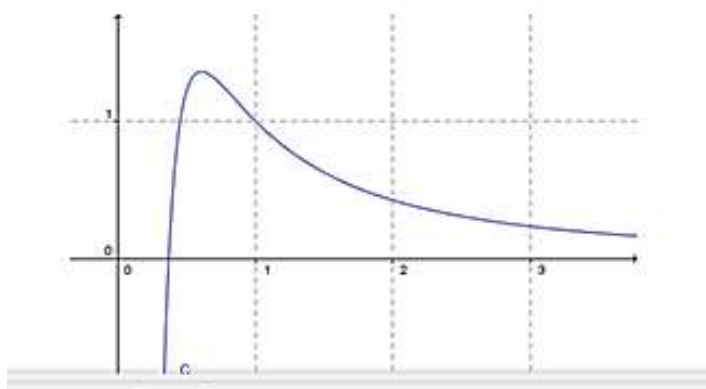
guessmaths

Extrait d'un exercice du Bac S Amérique du Nord 2013. Terminale S

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



I- 1) Étudier la limite de f en 0.

2) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$?

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

II- 1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}$.

2) Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation : $-1 - 2\ln(x) > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3) Dresser le tableau des variations de la fonction f .

III- 1) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

2) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

CORRIGÉ

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$

$$\text{I- 1) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln(x)) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \times +\infty = -\infty$$

2) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (Théorème des croissances comparées)

$f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$; on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3) En déduire que les axes du repère sont des asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.

II- 1) On utilisera la formule de dérivation $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; avec $u = 1 + \ln(x)$ et $v = x^2$

$$\text{Donc } u' = \frac{1}{x} \text{ et } v' = 2x$$

$$\text{On obtient : } f'(x) = \frac{x(-1 - 2\ln(x))}{x^4} ; \text{ puisque } x \neq 0 ; \text{ alors } f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

$$2) \text{ On a : } -1 - 2\ln(x) > 0 \Rightarrow \ln(x) < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$$

Et comme $x^3 > 0$ sur $]0; +\infty[$; alors $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2\ln(x)$

$$\text{Donc } f'(x) > 0 \text{ pour } 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) < 0 \text{ pour } x > e^{-\frac{1}{2}}$$

$$3) \text{ on a } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{e}{2}$$

D'où le tableau de variations de f

x	0 $+\infty$	$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

IV- 1) f est strictement croissante sur $\left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$ et varie de $-\infty$ à $\frac{e}{2}$ sur cet intervalle et

$0 \in \left] -\infty; \frac{e}{2} \right]$; donc d'après TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 qui vérifie :

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow x_0 = e^{-1}$$

D'où la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $(x_0 = e^{-1}; y_0 = 0)$

2) et pour $x > e^{-1}$ la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses donc $f(x) > 0$

pour $0 < x < e^{-1}$ la courbe de f est au-dessous de l'axe des abscisses donc $f(x) < 0$

pour $x = e^{-1}$ la courbe de f coupe l'axe des abscisses donc $f(x) = 0$