



Introduction des nombres complexes

Certaines équations n'admettent pas de solutions dans $\mathbb{R}$ comme : $x^2 = -1$.

On construit un ensemble contenant $\mathbb{R}$ où ces équations auront des solutions.

Définition : il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ et un élément noté i vérifiant $i^2 = -1$.

$\mathbb{C}$ est muni de deux opérations l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$ qui prolongent les opérations dans $\mathbb{R}$.

Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent des nombres complexes et s'écrivent sous la forme $x + iy$ où

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $\mathbb{C} = \{x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ s'appelle l'ensemble des nombres complexes.

Forme algébrique

$(\forall z \in \mathbb{C})(\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2) : z = x + iy$

Si $x = 0$ alors : $z = iy$ s'appelle un nombre imaginaire pur.

L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}$

L'écriture $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z

Le réel x s'appelle la partie réelle de z et se note $\text{Re}(z)$

Le réel y s'appelle la partie imaginaire de z et se note $\text{Im}(z)$

z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$

Calcul dans $\mathbb{C}$

Égalité de deux complexes

$z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$

$z = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes où $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}$ on a :

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

$$-z = -(a + ib) = -a + i(-b)$$

$$\text{Si } z \neq 0 \text{ alors : } \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Remarque : les opérations sur $\mathbb{C}$ suivent les même règle de calcul que dans $\mathbb{R}$ avec $i^2 = -1$

$$z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

Représentation géométrique d'un nombre complexe
le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1) Affixe d'un point

À tout nombre complexe $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

on associe le point $M(a, b)$

z s'appelle l'affixe de M et on écrit :

$$\text{aff}(M) = z$$

M s'appelle l'image de z et on écrit $M(z)$

et se lit M d'affixe z

Le plan P s'appelle le plan complexe.

L'axe des abscisses s'appelle l'axe des réels.

L'axe des ordonnées s'appelle l'axe des nombres imaginaires purs.

$$M \in (Ox) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$M \in (Oy) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

$$M = M' \Leftrightarrow \text{aff}(M) = \text{aff}(M')$$

2) Affixe d'un vecteur

À chaque nombre complexe $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on associe le vecteur $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$

z s'appelle l'affixe de $\vec{u}$ et on écrit : $\text{aff}(\vec{u}) = z$

$\vec{u}$ s'appelle l'image de z et on écrit $\vec{u}(z)$ et se lit $\vec{u}$ d'affixe z

$$\bullet \quad \text{aff}(\vec{u}) = \text{aff}(\vec{u}') \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{u}'$$

$$\bullet \quad \text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$$

si $\vec{u}$ a pour affixe z et $\vec{v}$ a pour affixe z' alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$

$$\bullet \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}) : \text{aff}(\alpha \vec{u}) = \alpha \times \text{aff}(\vec{u})$$

$$\bullet \quad \text{aff}(\overrightarrow{OM}) = \text{aff}(M)$$

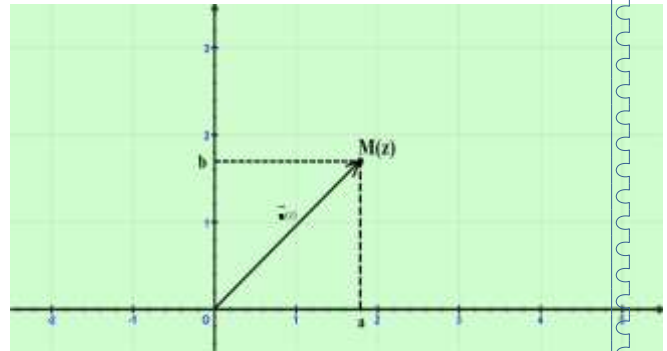
$$\bullet \quad \text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A) = z_B - z_A$$

$$\bullet \quad I \text{ est le milieu de } [AB] \text{ ssi } \text{aff}(I) = \frac{\text{aff}(A) + \text{aff}(B)}{2} = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Alignement de trois points

Soient A , B et C trois points d'affixes respectivement z_A , z_B et z_C . $A \neq B$

A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}) : \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$



$$\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}) : z_C - z_A = \lambda (z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Propriété :

trois points A , B et C d'affixes respectivement z_A , z_B et z_C avec $A \neq B$ sont alignés ssi

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

le conjugué d'un complexe

définition : soit $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

le nombre complexe $z = x - iy$ s'appelle le conjugué de z et se note $\bar{z}$

Remarque : $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés : soient z et z' deux nombres complexes.

$$1) \bar{\bar{z}} = z \quad 2) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad 3) \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

$$4) \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad \text{si } z' \neq 0 \quad 5) (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

Conséquence : si $P(z)$ est un polynôme à coefficients réels alors : $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

donc : si α est racine de $P(z)$ alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de $P(z)$

Propriété : Soit $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$1) \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{ie } z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$2) z \text{ est réel} \Leftrightarrow \bar{z} = z \quad 3) z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

Module d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. on a : $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition : soit $z \in \mathbb{C}$. le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$ s'appelle le module de z et se note $|z|$

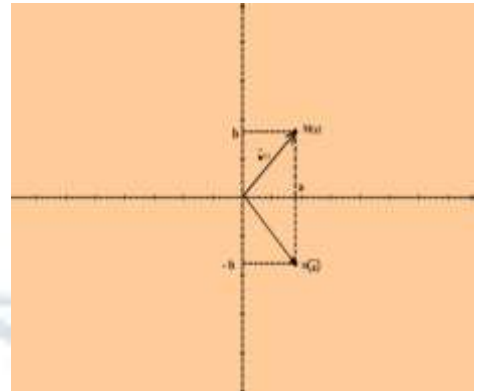
Interprétation géométrique

Soit M le point d'affixe z . $|z| = OM$ distance entre l'origine du repère et M

si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe z alors : $\|\vec{u}\| = |z|$

si A et B sont deux points d'affixes respectivement z_A et z_B alors : $AB = |z_B - z_A|$

Propriétés : pour tous nombres complexes z et z' . on a :



$$1) |\bar{z}| = |z| = |-z| \quad 2) |z|^2 = z \times \bar{z} \quad 3) \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad 4) |z \times z'| = |z| \times |z'| \quad 5) \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$6) |z^n| = |z|^n \quad 7) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad 8) |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad 9) |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

$$10) ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Argument d'un nombre complexe non nul

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z .

On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que : $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi]$.

un argument de z est noté $\arg z$

Remarque : *tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments .si θ est un argument de z

alors les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. on écrit : $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

$$\bullet z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. soit r le module de z et θ un argument de z . le couple de coordonnées de $M(z)$ est $(r \cos \theta, r \sin \theta)$

donc : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Définition : Tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique de z et se note $[r, \theta]$

Propriété : si $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ alors : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\text{avec : } r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Propriétés :} \quad 1) [r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta'[2\pi] \end{cases}$$

$$2) [r, \theta] \times [r', \theta'] = [r \times r', \theta + \theta']$$

$$3) \frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right]$$

$$4) \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$$

$$5) (\forall n \in \mathbb{N}) : [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

$$6) \overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$$

$$7) -[r, \theta] = [r, \theta + \pi]$$

Conséquences : 1) $\arg(z z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$

$$2) \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$3) \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$$

$$4) \arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi]$$

$$5) \arg(\bar{z}) \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$6) \arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$$

Utilisation en géométrie

Soient $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ deux vecteurs non nuls.

$$1) (\overrightarrow{e_1}, \vec{u}) \equiv \arg z [2\pi]$$

$$2) (\overrightarrow{u}, \vec{v}) \equiv \arg z' - \arg z [2\pi]$$

$$3) \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \arg \frac{z'}{z} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}^*$$

$$4) \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \arg \frac{z'}{z} \equiv 0 [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}^*$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

Écriture exponentielle d'un complexe non nul

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. le nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta$ se note $e^{i\theta}$

Donc pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ le nombre complexe $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ se note $re^{i\theta}$

Cette notation s'appelle la forme exponentielle de z

Propriétés :

$$1) e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$2) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$3) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$4) (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

$$5) \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$6) -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ signifie $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ et s'appelle la **formule de Moivre**

Formules d'Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Forme trigonométrique de $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} \right) = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} \right) = 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)}$$

Équations du second degré

1) Racines carrées d'un nombre complexe

Définition : soit $Z \in \mathbb{C}$. on appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z tel que : $z^2 = Z$

Si $Z = [\rho, \alpha]$ alors : Z admet deux racines carrées $\left[\sqrt{\rho}, \frac{\alpha}{2} \right]$ et $-\left[\sqrt{\rho}, \frac{\alpha}{2} \right]$

Méthode algébrique : $Z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$

On a : $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = x^2 + y^2$ et $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

• Soit l'équation (1) : $az^2 + bz + c = 0$ où $z \in \mathbb{C}$ et a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$

$$\text{On a : } az^2 + bz + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

avec : $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé le **discriminant** de l'équation (1)

si $\Delta = 0$ alors : (1) $\Leftrightarrow z = \frac{-b}{2a}$

si $\Delta \neq 0$ alors Δ admet deux racines carrées δ et $-\delta$ et on a :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right] = a \left(z + \frac{b+\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b-\delta}{2a} \right)$$

$$\text{donc : } (1) \Leftrightarrow z = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Théorème :

Soit l'équation (1) : $az^2 + bz + c = 0$ où $z \in \mathbb{C}$ et a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une seule solution $z_0 = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

où δ est une racine carrée de Δ

Cas particulier : si les coefficients a, b et c de l'équation sont réels alors : $\Delta \in \mathbb{R}$

si $\Delta \geq 0$ alors l'équation admet deux racines réelles $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux racines complexes non réels et conjugués l'un de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Les racines nième d'un nombre complexe non nul

Définition: soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

On appelle racine nième de Z toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = Z$

Propriété :

Si $Z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors Z admet exactement n racines nièmes qui sont :

$$z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Les images es racines nièmes

Soient M_k l'image de $z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right]$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

On a : $OM_k = |z_k| = \sqrt[n]{r}$ donc les points M_k appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}} \right) &\equiv \arg z_{k+1} - \arg z_k [2\pi] \\ &\equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi] \end{aligned}$$

donc l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$ est constant

d'où les points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$

Les racines nièmes de l'unité

Les racines nièmes de 1 s'appellent les racines nième de l'unité

Les racines nième de l'unité sont : $\omega_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right] = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Les images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier de n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique

soit l'ensemble $U = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$

- 1) si $z \in U$ alors $\bar{z} \in U$ et $\bar{z} = \frac{1}{z}$
- 2) si $z \in U$ et $z' \in U$ alors $zz' \in U$

Propriété : La somme des racines nièmes de l'unité est nulle

$$z_k = \left[1, \frac{k2\pi}{n}\right] = \left[1, \frac{2\pi}{n}\right]^k \text{ donc : } z_k = z_1^k$$

$$1 + z_1 + z_1^2 + \dots + z_1^{n-1} = \frac{1 - z_1^n}{1 - z_1} = 0$$

Relation entre racines nièmes d'un complexe non nul et racines nièmes de l'unité

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. soit a une racine nième de Z

$$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = a^n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{a} \text{ est une racine nième de l'unité}$$

$$\Leftrightarrow z \in \{a\omega_0, a\omega_1, \dots, a\omega_{n-1}\} \text{ où les } \omega_k \text{ sont les racines nièmes de l'unité}$$

Les racines nièmes de Z s'obtiennent en multipliant une racine nième de Z par les racines nièmes de l'unité

Propriétés :

- 1) Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

2) Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = k(z - \omega)$ est l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k

3) soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec

$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α

Remarque :

L'expression de z' en fonction de z s'appelle l'écriture complexe de l'application

$$f: P \rightarrow P$$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

Preuve :

$$1) \quad z' = z + b \Leftrightarrow z' - z = b$$

$$2) \quad z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$3) \quad z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega) \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \Omega M' = \Omega M \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow M' = r(M)$$

où r est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α

Résumé

On suppose que le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) **Écriture complexe d'une translation :**

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$. $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par la translation t .

$$t(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$$

2) **Écriture complexe d'une homothétie :**

Soient h une homothétie de centre Ω d'affixe z_{Ω} et de rapport k . $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'homothétie h .

$$h(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega})$$

3) Écriture complexe d'une rotation :

Soient R une rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ . $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par la rotation R .

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_\Omega = e^{i\theta} (z - z_\Omega)$$

Exemple1 :

Reconnaitre les transformations du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec :

1) $z' = z + 1 - i$ 2) $z' = -z$ 3) $z' = -iz$ 4) $z' = iz + i - 1$ 5) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$

Exemple2 : donner l'écriture complexe des transformations suivantes :

1) translation de vecteur $\vec{u}(1, 2)$

2) homothétie de centre A d'affixe $-1+i$ et de rapport -3

3) rotation de centre B d'affixe $3-i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$