

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 4x + 1 - xe^x$

On note par C sa courbe dans un repère orthonormé (unité 4 cm)

Partie A :

- 1) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et déduire le signe de $f''(x)$
- 2) Dresser le tableau de variation de f'
- 3) Montrer que $f'(x) = 0$ admet une seule solution α telle que $0,79 < \alpha < 0,8$
- 4) Dresser le tableau de variation de f
- 5) Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $0,79 < \beta < 0,8$
- 6) Construire C
- 7) a) Calculer $\int_0^\beta xe^x dx$
- b) Déduire l'expression en fonction de β de $\int_0^\beta f(x) dx = 2\beta^2 + \beta + 2 + \frac{1}{\beta}$
- d) montrer que $\beta = 2 + \frac{1}{\beta}$ et déduire que $\beta = 2 + \frac{1}{\beta}$
- e) Soit $h(x) = \ln\left(4 + \frac{1}{x}\right)$, montrer que $h(\beta) = \beta$

Exercice 2 :

Partie A :

Soit $g(x) = 1 + x + e^x$

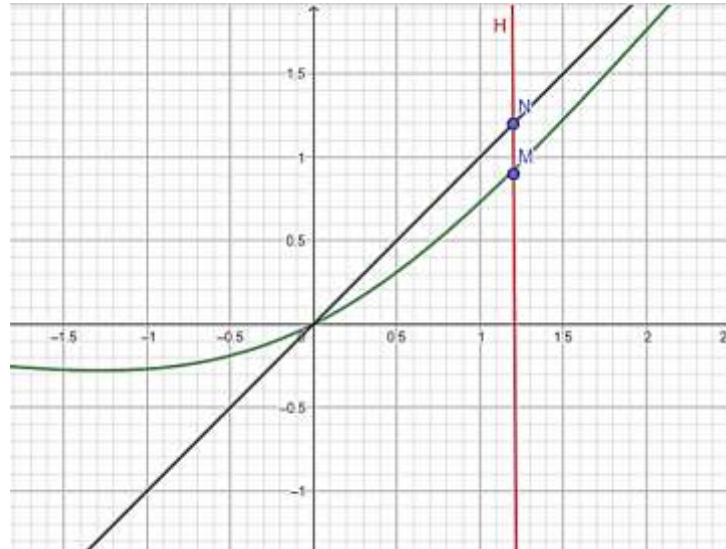
- 1) Etudier g
- 2) Montrer que $g(x) = 0$ admet une seule solution α telle que : $-1,3 < \alpha < -1,2$.
- 3) Etudier le signe de g

Partie B :

Soit $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$, on désigne par C sa courbe dans un repère

- 1) a) dresser le tableau de variation de f
- b) montrer que $f(\alpha) = 1 + \alpha$
- c) montrer que $D : y = x$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$
- d) Ecrire l'équation de la tangente T à C au point $O(0,0)$
puis étudier la position relative de T par rapport à C
- e) Tracer C

2) Soit $H(x,0)$, la parallèle à l'axe Oy passant par H coupe C en M et la droite D en N On note $K(x) = MN$



a) montrer que $K(x) = \frac{x}{1+e^x}$

b) montrer que $K'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \times g(-x)$

c) Dédurre que MN est maximale en $(-\alpha)$

3) Montrer que $f(-\alpha) = 1$

4) Montrer que la tangente à C au point A d'abscisse $(-\alpha)$ est parallèle à D

5) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$; on a : $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$

b) Dédurre un encadrement de l'aire du plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x=1$ et $x=-\alpha$