Examen national 2018
session de rattrapage   2éme Bac SM

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4.

Pour tout $(x;y)\in \mathbb{R}^2$ on pose : $M(x;y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$ .et on considère l'ensemble :

$E=\{M(x;y)/(x;y)\in \mathbb{R}^2\}$

0,50 pt 1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

0,50 pt 2) a) Montrer que E est sous espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.

0,25 pt b) Montrer que la dimension de l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$ est 2.

0,25 pt 3) a) Montrer que E est une partie stable par rapport à la loi $\times$.

0,50 pt b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4) On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne "T" par : pour tout $M(x;y)$ et $M(x';y')$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $M(x;y)\mathrm{T}M(x';y')=M(x;y)\times M(x';y')-M(y;0)\times M(y';0)$ Et soit φ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ dans E par : pour tout nombre complexe écrit sous forme algébrique $z=x+iy$, $\varphi(z)=M(x;y)$

0,25 pt a) Montrer que E est une partie stable par rapport à la loi T.

0,25 pt b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans (E,T).

0,25 pt c) On pose $E^*=E-\{O\}$. Montrer que (E^*,T) est un groupe commutatif.

0,50 pt 5) a) Montrer que "T" est distributive par rapport à la loi "$+$" dans E.

0,25 pt b) Montrer que $(E,+,\mathrm{T})$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3,5 points)

1) Pour tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}-\{i\}$, on pose : $h(z)=i\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)$

0,50 pt a) Vérifier que : $h(z)=z \Leftrightarrow z^2-2iz-2=0$.

0,50 pt b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-2iz-2=0$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

On note a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que : $Re(a)=1$.

Et pour tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}-\{i;a;b\}$,on considère les points $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$

0,75 pt a) Montrer que : $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}=-\dfrac{z-a}{z-b}$

0,75 pt b) En déduire que : $\left(\overline{M'B};\overline{M'A}\right)\equiv\pi+\left(\overline{MB};\overline{MA}\right)[2\pi]$.

0,50 pt 3) a) Montrer que : si les points M, A et B sont alignés alors les points M, A, B et M′ sont alignés.

0,50 pt b) Montrer que : si les points M, A et B ne sont pas alignés alors les points M, A, B et M' sont cocycliques.

Exercice 3 : (3 points)

On lance une pièce de monnaie non truquées 10 fois de suite.
Soit X la variable aléatoire reliant chaque résultat à la fréquence d'apparition de "pile".
(C'est-à-dire le nombre d'apparition de "pile" divisé par 10)

1,00 pt 1) a) Déterminer les valeurs possibles de la variable X.

1,00 pt b) Calculer la probabilité de l'événement $\left[X=\frac{1}{2}\right]$

1,00 pt 2) Calculer la probabilité de l'événement : « X supérieur ou égale à $\frac{9}{10}$ »

Exercice 4 : (10 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$; $(x>0)$

Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$.

0,50 pt 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0. (Remarquer que $f(x)=\left(4x^{\frac{1}{4}}\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$)

0,75 pt b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0,75 pt 2) a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pt b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

1,00 pt c) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

En déduire que : $(\forall x\in]0;1])$: $0\le\sqrt{x}(\ln x)^2\le\left(\frac{4}{e}\right)^2$

d) Tracer la courbe (C). (On prend $\|\vec{i}\|=2cm$)

3) Pour tout $x\ge 0$ on pose : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

0,50 pt a) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

1,00 pt b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x\ge 0$. En déduire la monotonie de F sur l'intervalle $[0;+\infty[$

0,75pt 4) a) En utilisant la méthode d'intégration par partie calculer : $\int_x^1\sqrt{t}\ln t\,dt$

1,00 pt b) Montrer que pour tout $x>0$: $F(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2+\frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x-\frac{16}{27}x\sqrt{x}+\frac{16}{27}$

1,00 pt c) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

5) Pour tout entier naturel non nul n on pose : $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$

1,00 pt a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est bornée, et qu'elle est strictement croissante.

0,75 pt b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.