Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + (x-1)\ln(x-1) & ; x > 1 \\ f(x) = x - 1 - e^{x-1} & ; x \leq 1 \end{cases}$

1) Montrer que $D_f = \mathbb{R}$

2) Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

3) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et calculer* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4) a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty$ *et que :* $f'_g(1) = 0$

b) Interpréter les résultats géométriquement.

5) a) Calculer : $f'(x)$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est croissante sur $]-\infty;1]$ *et* $[2;+\infty[$, *et décroissante sur* $[1;2]$.

c) Donner le tableau de variations de f.

6) Montrer que (C_f) *admet l'axe des y comme une direction asymptotique, et que la droite* $y = x - 1$ *est une asymptote oblique de* (C_f).

7 Montrer qu'il existe α *de* $]4;5[$ *tel que :* $f(\alpha) = 0$.

8 Construire (C_f).

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 3e^x + 2\right)$.

1- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ *:* $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$.

b) Montrer que : $D_f =]-\infty;0[\cup]\ln 2;+\infty[$.

2- Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3- Etudier les branches infinies de (C_f).

4- Etudier la position relative de (C_f) *et son asymptote oblique.*

5- Calculer $f'(x)$ *et donner le tableau de variations de f.*

6- a) Montrer que (C_f) *coupe l'axe des abscisses en deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.*

b) Tracer (C_f).

7- Discuter graphiquement selon le réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation : $e^{2x} - 3e^x - e^m + 2 = 0$

8- On pose : $g(x) = |f(x)|$. *Tracer* (C_g).

9- Déterminer une primitive de la fonction : $x \mapsto e^{f(x)}$ *sur* $\mathbb{R}^*_-$.

www.guessmaths.co

Exercice 3

Calculer :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

www.guessmaths.co